Séminaire Henri Cartan

Bernard Malgrange

Le théorème de préparation en géométrie différentiable. II. Rappels sur les fonctions différentiables

Séminaire Henri Cartan, tome 15 (1962-1963), exp. n° 12, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1962-1963__15__A5_0>

LE THÉORÈME DE PRÉPARATION EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIABLE

par Bernard MALGRANGE

II. Rappels sur les fonctions différentiables.

1. Fonctions différentiables au sens de WHITNEY.

Soit X un sous-ensemble localement fermé de $\underset{\sim}{R}^n$; prenons un ouvert $\Omega \subset \underset{\sim}{R}^n$ tel qu'on ait $X \subset \Omega$ et que X soit fermé dans Ω ; désignons par $\mathcal{E}^m(\Omega)$ l'espace des fonctions m fois continûment dérivables dans Ω et à valeurs réelles (m entier $\geqslant 0$ ou $+\infty$) muni de sa topologie habituelle, i. e. la convergence uniforme sur tout compact des fonctions et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre m ; désignons encore par $\mathcal{J}^m(X ; \Omega)$ l'idéal, évidemment fermé, de $\mathcal{E}^m(\Omega)$ formé des fonctions nulles ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre m sur X. Nous poserons, par définition,

$$\mathcal{E}^m(X) = \mathcal{E}^m(\Omega)/\mathcal{J}^m(X ; \Omega)$$

et nous munirons cet espace de la topologie quotient de celle de $\mathcal{E}^m(\Omega)$. Il est immédiat de vérifier que l'espace vectoriel topologique $\mathcal{E}^m(X)$ ne dépend pas de l'ouvert Ω choisi, à un isomorphisme canonique près. Nous appellerons ses éléments "fonctions m fois continûment différentiables sur X" (en toute rigueur, il vaudrait mieux dire "sur le voisinage infinitésimal d'ordre m de X", mais cela n'amènera dans la suite aucune confusion) ; lorsque $m = +\infty$, on dira, comme d'habitude, "fonctions différentiables sur X" et l'on écrira $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{J}(X ; \Omega)$, etc., au lieu de $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$, $\mathcal{J}^\infty(X ; \Omega)$, etc.

Rappelons quelques résultats relatifs à ces espaces :

a. Le dual de $\mathcal{E}^m(X)$ est (canoniquement) isomorphe à $\mathcal{E}'^m(X)$, espace des distributions d'ordre m sur $\underset{\sim}{R}^n$, à support compact et contenu dans X.

Soit en effet f une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}^m(X)$; f définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}^m(\Omega)$, i. e. un élément de $\mathcal{E}'^m(\Omega)$. Pour établir le résultat, il suffit de prouver que les éléments de $\mathcal{E}'^m(\Omega)$ qui s'annulent sur $\mathcal{J}^m(X ; \Omega)$ sont exactement ceux dont le support est contenu dans X. Or cela résulte immédiatement du lemme suivant (cf. [5], chap. 3, théorème XXVIII) :

LEMME 1. - Les fonctions de $\mathcal{E}^m(\Omega)$ qui s'annulent au voisinage de X sont denses dans $\mathcal{I}(X\ ;\ \Omega)$.

b. Lorsque $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \underset{\sim}{N}^n$, posons comme d'habitude

$$|k| = k_1 + \ldots + k_n\ , \qquad k! = k_1! \ldots k_n!\ ,$$

$$x^k = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}\ , \qquad D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\ .$$

Soit $T^m(X)$ (espace des "champs de Taylor d'ordre m sur X") l'ensemble des familles

$$f = (f^k)_{k \in N^n, |k| \leq m}$$

de fonctions continues sur X à valeurs réelles, indexées par les n-entiers d'ordre $\leq m$. On obtient une application $\mathcal{E}^m(\Omega) \to T^m(X)$ en associant à tout $f \in \mathcal{E}^m(\Omega)$ la famille des fonctions sur X

$$x \rightsquigarrow D^k f(x) \qquad (|k| \leq m)\ .$$

Le noyau de cette application est évidemment $\mathcal{I}^m(X\ ;\ \Omega)$, d'où une injection $W^m : \mathcal{E}^m(X) \to T^m(X)$. Nous allons rappeler la caractérisation de l'image de W^m. Pour cela, remarquons qu'en vertu de la formule de Taylor, tout $f \in \mathrm{im}(W^m)$ possède la propriété suivante, que nous désignerons par (W_m) :

(i) Lorsque $m < +\infty$: pour tout $k \in \underset{\sim}{N}^n$, avec $|k| \leq m$, et tout $a \in X$, on a

$$\lim_{x\to a, y\to a, y\neq x} \frac{1}{\|x - y\|^{m-|k|}} \left| f^k(x) - \sum_{|k+\ell| \leq m} f^{k+\ell}(y) \frac{(x-y)^\ell}{\ell!} \right| = 0\ .$$

(ii) Lorsque $m = +\infty$: f vérifie $(W_{m'})$ pour tout m' fini.

Cela posé, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 1 (WHITNEY). - L'image de $\mathcal{E}^m(X)$ par W^m est le sous-espace $W^m(X)$ de $T^m(X)$ formé des éléments qui vérifient (W_m).

Pour le cas " m fini", nous nous contenterons de renvoyer à [6] (voir aussi [1], ou [2]), et nous indiquerons rapidement comment passer de là au cas $m = +\infty$. Pour cela, remarquons que pour $m \leq m'$, on a une application évidente $W^{m'}(X) \to W^m(X)$ et que $W(X)$ est la limite projective des $W^m(X)$ munies de ces applications. D'autre part, on a évidemment

$$\varprojlim \mathcal{E}^m(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega) , \qquad \varprojlim \mathcal{I}^m(X ; \Omega) = \mathcal{I}(X ; \Omega) \quad .$$

Tout revient donc à montrer que l'on a

$$\varprojlim \mathcal{E}^m(X) = \mathcal{E}(X) \quad ,$$

i. e. que la suite exacte

$$0 \to \mathcal{I}^m(X ; \Omega) \to \mathcal{E}^m(\Omega) \to \mathcal{E}^m(X) \to 0$$

reste exacte par passage à la limite projective. Or cela se fait par le procédé classique de Mittag-Leffler (il suffit, pour pouvoir l'appliquer, de savoir que $\mathcal{I}^{m+1}(X ; \Omega)$ est dense dans $\mathcal{I}^m(X ; \Omega)$, ce qui résulte aussitôt, par régularisation, du lemme 1).

Naturellement, ce raisonnement redonne en particulier le théorème de Borel rappelé dans le précédent exposé.

Pour m fini, munissons $W^m(X)$ de la topologie définie par les semi-normes suivantes (on laisse le lecteur vérifier qu'elles sont bien finies sur $W^m(X)$) :

$$\sup_{x \in K} |f^k(x)| \quad \text{et} \quad \sup_{x\in K, y \in K, x \neq y} \frac{1}{\|x - y\|^{m-|k|}} \left| f^k(x) - \sum_{|k+\ell| \leq m} f^{k+\ell}(y) \frac{(x-y)^\ell}{\ell !} \right|$$

($|k| \leq m$, K un compact quelconque de X) ; nous obtenons un espace métrisable (et même normé si X est compact) dont on vérifie aussitôt qu'il est complet. Il résulte alors du théorème du graphe fermé, ou directement de l'analyse de la démonstration du théorème 1, que w^m est un isomorphisme topologique de $\mathcal{E}^m(X)$ sur $W^m(X)$. Pour $m = +\infty$, ces résultats restent vrai si l'on munit $W(X)$ de la topologie définie par les semi-normes ci-dessus, avec m remplacé par n'importe quel entier naturel m' (1).

On remarquera que, en général, la topologie de $W^m(X)$ n'est pas induite par la topologie naturelle de $T^m(X)$, définie par les semi-normes $\sup_{x\in K} |f^k(x)|$. La propriété en question n'est vraie que si X est "suffisamment régulier".

2. Ensembles régulièrement séparés.

Soit Z un sous-ensemble localement fermé de $\underline{R}^n$, et soient $X \subset Z$, $Y \subset Z$, avec $Z = X \cup Y$, X et Y étant fermés dans Z . Considérons la suite

$$\text{(L)} \qquad 0 \to \mathcal{E}(X \cup Y) \xrightarrow{\delta} \mathcal{E}(X) \oplus \mathcal{E}(Y) \xrightarrow{\rho} \mathcal{E}(X \cap Y) \to 0$$

---

(1) Notons d'ailleurs que $W(X)$ est exactement le sous-espace de $T(X)$ pour lequel toutes ces semi-normes sont finies, et que la propriété analogue est fausse pour $m < +\infty$ (démonstration laissée au lecteur).

où δ est l'application diagonale $f \rightsquigarrow (f', f'')$, f' (resp. f'') étant la restriction de f à X (resp. Y), définie de la manière évidente, et où σ est l'application $(f, g) \rightsquigarrow f' - g'$, f' (resp. g') désignant la restriction de f (resp. g) à $X \cap Y$.

Evidemment, $\sigma\delta = 0$, σ est surjectif (donc est un homomorphisme), et δ est injectif. De plus, $\mathrm{im}(\delta)$ est dense dans $\ker(\sigma)$: soit en effet $(f, g) \in \ker(\sigma)$; en prolongeant g en $\tilde{g} \in \mathcal{E}(X \cup Y)$, on a

$$(f, g) = \delta(\tilde{g}) + (f', 0) \quad ,$$

avec $f' = f - \tilde{g}$, et la restriction de f' à $X \cap Y$ est nulle ; il résulte alors du lemme 1 que f' est adhérent à l'ensemble des $h \in \mathcal{E}(X)$ nuls au voisinage de $X \cap Y$; en prolongeant h par 0, on obtient un élément de $\mathcal{E}(X \cup Y)$, donc $(f', 0)$ est adhérent à $\mathrm{im}(\delta)$.

Considérons aussi, quoique nous n'en n'ayons pas absolument besoin, la suite transposée :

$$(L') \qquad 0 \leftarrow \mathcal{E}'(X \cup Y) \xleftarrow{\delta'} \mathcal{E}'(X) \oplus \mathcal{E}'(Y) \xleftarrow{\sigma'} \mathcal{E}'(X \cap Y) \leftarrow 0 \quad .$$

On déduit des propriétés précédentes que $\delta'\sigma' = 0$, que σ' est injectif et a une image fermée ; que $\mathrm{im}(\sigma')$ est dense dans $\ker(\delta')$, donc <u>égal</u> à $\ker(\delta')$ (ce qu'on pourrait d'ailleurs établir directement par les propriétés du support des distributions) ; et enfin que $\mathrm{im}(\delta')$ est dense dans $\mathcal{E}'(X \cup Y)$.

Il résulte de tout cela que les propriétés "$\ker(\sigma) = \mathrm{im}(\delta)$" et "$\delta'$ est surjectif" sont équivalentes ; cela revient à dire que (L) est exacte si et seulement si (L') est exacte. Par définition nous dirons avec ŁOJASIEWICZ que "X <u>et</u> Y <u>sont régulièrement séparés</u>" si ces propriétés sont vraies.

THÉORÈME 2 (ŁOJASIEWICZ). - <u>Pour que</u> X <u>et</u> Y <u>soient régulièrement séparés, il faut et il suffit que</u> $X \cap Y = \emptyset$ <u>ou que la condition suivante soit vérifiée</u> :

(Λ) <u>Pour tout compact</u> $K \subset X$ <u>et tout compact</u> $L \subset Y$, <u>il existe</u> $C > 0$ <u>et</u> $\alpha > 0$ <u>tels que, pour tout</u> $x \in K$, <u>on ait</u> $d(x, L) \geqslant c\,d(x, X \cap Y)^{\alpha}$, (d <u>désignant la distance euclidienne dans</u> $\mathbb{R}^n$).

On laisse au lecteur le soin de vérifier directement que cette condition est bien symétrique par rapport à X et Y.

La démonstration de ŁOJASIEWICZ consiste à montrer l'équivalence de (Λ) avec la surjectivité de δ' (cf. [3], ou [4], exposé 21). Pour rester dans le cadre des fonctions différentiables, nous allons en donner une autre, fondée sur le théorème 1.

a. $(\Lambda) \implies$ "$\ker(\sigma) = \operatorname{im}(\delta)$" . Soit $f = (f^k)$ (resp. $g = (g^k)$) un élément de $W(X)$ (resp. $W(Y)$) ; supposons qu'on ait $f = g$ sur $X \cap Y$. On définit $h = (h^k) \in T(X \cup Y)$ par $h^k = f^k$ sur X , $h^k = g^k$ sur Y , et il faut montrer que l'on a $h \in W(X \cup Y)$. En prolongeant g en $\tilde{g} \in W(X \cup Y)$, et en remplaçant f par $f - \tilde{g}$, on se ramène aussitôt au cas où $g = 0$ (et par conséquent $f = 0$ sur $X \cap Y$).

Soit alors M un compact de $X \cup Y$, et posons $X \cap M = K$, $Y \cap M = L$. Nous devons vérifier que, pour tout $m \in \underset{\sim}{N}$ et tout $k \in \underset{\sim}{N}^n$, il existe $c' > 0$ tel qu'on ait, pour tout $x \in M$ et tout $y \in M$:

$$|h^k(x) - \sum_{|\ell| \leq m} h^{k+\ell}(y) \frac{(x-y)^\ell}{\ell!}| \leq c' \|x - y\|^m$$

(cela entraînera bien $h \in W(X \cup Y)$: cf. note (1)).

Le cas où x et y appartiennent tous les deux à X , ou tous les deux à Y , est immédiat. Supposons donc $x \in X$, $y \in Y$ (le cas où $x \in Y$, $y \in X$ se traiterait de manière analogue) ; dans ce cas, notre inégalité s'écrit simplement

$$|f^k(x)| \leq c' \|x - y\|^m \quad .$$

Par hypothèse, on peut trouver $z \in X \cap Y$ tel qu'on ait $\|x - y\| \geq \frac{c}{2}\|x - z\|^\alpha$; on peut supposer que, lorsque x varie dans K et y dans L , z varie dans un compact de $X \cap Y$. Soit m' un entier tel qu'on ait $\alpha m \leq m'$; comme $\|x - z\|$ est borné, on aura $\|x - z\|^{m'} \leq c'' \|x - y\|^m$, avec $c'' \geq 0$. En appliquant (W) à f , on trouve

$$|f^k(x) - \sum_{|\ell| \leq m'} f^{k+\ell}(z) \frac{(x-z)^\ell}{\ell!}| \leq c''' \|x - z\|^{m'}$$

ou, puisque $f = 0$ sur $X \cap Y$:

$$|f^k(x)| \leq c''' \|x - z\|^{m'} \leq c'' c''' \|x - y\|^m \quad ,$$

d'où le résultat.

b. "$\ker \sigma = \operatorname{im} \delta$" $\implies$ (Λ) .

Par hypothèse, l'image de δ est fermée, donc δ est un homomorphisme ; soit alors M un compact $\subset X \cup Y$. Pour tout $f \in W(X \cup Y)$, il existera en particulier une semi-norme p sur $W(X)$ et une semi-norme q sur $W(Y)$ telles qu'on ait, pour tout $x \in M$ et tout $y \in M$:

$$|f^0(x) - f^0(y) - \sum (x_i - y_i) f^i(y)| \leq [p(f) + q(f)] \|x - y\| \quad .$$

En particulier, si f est nul sur Y , il vient, en posant $X \cap M = K$, $Y \cap M = L$:

$$\text{pour tout} \quad x \in K_-, \qquad |f(x)| \leqslant p(f)\, d(x\,,\,L) \quad .$$

Soit enfin Ω un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$, tel que $X \cup Y$ soit un fermé de Ω. En "remontant" à $\mathcal{E}(\Omega)$ l'inégalité précédente, on trouve ceci : il existe un compact $N \subset \Omega$, un entier $m \geqslant 0$ et un $C > 0$ tels que, pour tout $F \in \mathcal{E}(\Omega)$, nul à l'ordre infini sur Y, et tout $x \in K$, on ait

$$|F(x)| \leqslant C\|F\|_{m,N}\, d(x\,,\,L)$$

avec

$$\|F\|_{m,N} = \sup_{x\in N} \sum_{|\ell|\leqslant m} |D^\ell\, F(x)| \quad .$$

Cela étant, soit φ une fonction indéfiniment dérivable dans $\underset{\sim}{R}^n$, à support dans la boule unité, avec $\varphi(0) = 1$; posons

$$\|\varphi\|_m = \sup_{x} \sum_{|\ell|\leqslant m} |D^\ell\, \varphi(x)| \quad .$$

Pour $x_o \in K$, appliquons l'inégalité précédente à la fonction $x \rightsquigarrow \varphi\left(\frac{x - x_o}{\varepsilon}\right)$, avec $\varepsilon = \inf(1\,,\,d(x\,,\,X \cap Y))$, et $x = x_o$; il vient $1 \leqslant \frac{C}{\varepsilon^m}\, d(x\,,\,L)\, \|\varphi\|_m$, d'où immédiatement le résultat.

<u>Remarque 1</u>. - On peut se proposer une étude analogue à la précédente, dans les espaces $\mathcal{E}^m$ avec m fini au lieu de $m = +\infty$. Les résultats sont les suivants :

a. Pour $m = 0$, la suite

$$0 \to \mathcal{E}^0(X \cup Y) \to \mathcal{E}^0(X) \oplus \mathcal{E}^0(Y) \to \mathcal{E}^0(X \cap Y) \to 0$$

est toujours exacte, i. e. X et Y sont toujours "0-régulièrement séparés" (évident!) ;

b. pour $0 < m < +\infty$, X et Y sont "m-régulièrement séparés" si et seulement si la condition (Λ) est vérifiée avec $\alpha = 1$, ce qui est une condition considérablement plus restrictive que la condition (Λ) elle-même!

<u>Remarque 2</u>. - En fait, la notion de régulière séparation est de caractère local. Soient Ω un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$, et X, Y deux fermés de Ω. Si X et Y sont régulièrement séparés, pour tout ouvert $\mathcal{O} \subset \Omega$, $\mathcal{O} \cap X$ et $\mathcal{O} \cap Y$ sont régulièrement séparés. Inversement, si $(\mathcal{O}_i)$ est un recouvrement de Ω tel que, $\forall\ i$, $X \cap \mathcal{O}_i$ et $Y \cap \mathcal{O}_i$ soient régulièrement séparés, X et Y sont régulièrement séparés. Ces faits s'établissent immédiatement en utilisant une partition différentiable de l'unité (et sont d'ailleurs tout aussi évidents à vérifier sur la condition (Λ)).

Exemple : Ensembles analytiques. - Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, un sous-ensemble fermé X de Ω est dit "analytique" si, au voisinage de tout point de X (ou de Ω, cela revient au même), il est défini par un nombre fini d'équations analytiques-réelles $f_i(x) = 0$; il suffit même de prendre une seule équation $\sum f_i^2(x) = 0$. Rappelons le résultat suivant [3] :

PROPOSITION 1. - Deux sous-ensembles analytiques quelconques X et Y de Ω sont régulièrement séparés.

En vertu de la remarque précédente, on peut supposer X (resp. Y) défini par une équation $f(x) = 0$ (resp. $g(x) = 0$). La proposition résulte alors du théorème suivant ([3], ou [4], exposé 22. Nous rappellerons aussi la démonstration dans le prochain exposé) :

THÉORÈME 3 (ŁOJASIEWICZ). - Soit f une fonction analytique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et X l'ensemble des zéros de f. Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C > 0$ et $\alpha > 0$ tels que, pour tout $x \in K$, on ait $|f(x)| \geq C d(x, X)^\alpha$.

Pour démontrer la proposition 1, on applique ce théorème à $f^2 + g^2$; quel que soit M compact de Ω, on aura donc, pour tout $x \in M$

$$f^2(x) + g^2(x) \geq C d(x, X \cap Y)^\alpha \quad ;$$

en particulier, si $x \in M \cap X$ on aura :

$$g^2(x) \geq C d(x, X \cap Y)^\alpha \quad .$$

Mais la formule des accroissements finis montre qu'il existe $c' \geq 0$ tel qu'on ait, $\forall\ x \in M \cap X$, $\forall\ y \in M \cap Y$: $|g(x)| \leq c'\|x - y\|$. Il en résulte aussitôt que la condition (Λ) est vérifiée, d'où le résultat.

3. Multiplicateurs.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et X un fermé de Ω.

Définition. - On note $\mathcal{M}(X ; \Omega)$ le sous-espace de $\mathcal{E}(\Omega - X)$ formé des fonctions f possédant la propriété suivante :

Pour tout K compact de Ω, et tout $k \in \mathbb{N}^n$, il existe $C > 0$ et α réel tels qu'on ait, $\forall\ x \in K - X$

$$|D^k f(x)| \leq C d(x, X)^\alpha \quad .$$

<u>Exemple</u>. – Soient f une fonction analytique dans Ω, et X l'ensemble de ses zéros ; on a $1/f \in \mathfrak{M}(X ; \Omega)$ (résulte du théorème 3 et de la formule de Leibniz).

THÉORÈME 4. – <u>Si</u> $f \in \mathfrak{M}(X ; \Omega)$, <u>la multiplication par</u> f <u>opère continûment dans</u> $\mathfrak{I}(X ; \Omega)$.

Autrement dit : pour tout $g \in \mathfrak{I}(X ; \Omega)$, la fonction fg, définie dans $\Omega - X$, se prolonge (d'une manière évidemment unique) en une fonction de $\mathfrak{I}(X ; \Omega)$, et l'application ainsi définie est continue.

<u>Démonstration</u>. – Soit $\mathfrak{I}'(X ; \Omega)$ l'espace des fonctions de $\mathcal{E}(\Omega)$ nulles au voisinage de X. La multiplication par f définit une application $\mathfrak{I}'(X ; \Omega) \to \mathfrak{I}'(X ; \Omega)$; grâce au lemme 1, il suffit d'établir que cette application est continue pour la topologie induite sur $\mathfrak{I}'(X ; \Omega)$ par $\mathcal{E}(\Omega)$. Or, soit $g \in \mathfrak{I}'(X ; \Omega)$, et $k \in \mathbb{N}^n$. Par Leibniz, on a (avec des notations évidentes) :

$$D^k(fg) = \sum_{\ell < k} \binom{k}{\ell} (D^\ell f)(D^{k-\ell} g) \quad ;$$

il suffit donc d'établir que lorsque k et ℓ sont fixés, et que x varie dans un compact $K \subset \Omega$, il existe un compact $L \subset \Omega$, un entier $m > 0$ et un $C > 0$, tels qu'on ait $\forall\ g \in \mathfrak{I}'(X ; \Omega)$, $\forall\ x \in K$

$$|D^k f(x)\, D^{k-\ell} g(x)| \leq C \|g\|_{m,\ell} \qquad \text{(cf. notations du paragraphe 2)} \quad .$$

Comme g est nul au voisinage de X, la formule de Taylor montre qu'on pourra trouver un compact $L \subset \Omega$, tel qu'on ait, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$|D^{k-\ell} g(x)| \leq C_m \|g\|_{m,}\ d(x, X)^{m-|k|+|\ell|} \qquad (C_m \geq 0) \quad ;$$

en choisissant m assez grand, et en tenant compte de l'hypothèse $f \in \mathfrak{M}(X ; \Omega)$, on trouve le resultat cherché.

Soient maintenant Y et Z deux sous-ensembles fermés de Ω, avec $Z \subset Y$. Nous désignerons par $\mathfrak{I}(Z ; Y)$ l'espace des $f \in \mathcal{E}(Y)$ dont la restriction à $\mathcal{E}(Z)$ est nulle (i. e. qui sont "plates sur Z"). Le théorème 4 a le corollaire suivant :

COROLLAIRE. – <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux sous-ensembles fermés de</u> Ω, <u>régulièrement séparés ; et soit</u> $f \in \mathfrak{M}(\Omega ; X)$. <u>Alors la multiplication par</u> f <u>opère dans</u> $(X \cap Y ; Y)$.

En effet, comme X et Y sont régulièrement séparés, la projection $\mathcal{E}(\Omega) \to \mathcal{E}(Y)$ envoie $\mathfrak{I}(X ; \Omega)$ sur $\mathfrak{I}(X \cap Y ; Y)$. D'où le résultat.

Remarque. - Il serait possible de définir un espace de multiplicateurs $\mathfrak{M}(Z ; Y) \subset \mathcal{E}(Y - Z)$ lorsque Y et Z sont des fermés de Ω, avec $Z \subset Y$, et de démontrer dans ce cas un analogue du théorème 4. Comme nous n'aurons pas à utiliser de tels espaces, nous laisserons au lecteur le soin d'examiner cette question.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GLAESER (Georges). - Etude de quelques algèbres tayloriennes, J. Anal. math., Jérusalem, t. 6, 1958, p. 1-124 (Thèse Sc. math. Nancy, 1957).

[2] HÖRMANDER (Lars). - On the division of distributions by polynomials, Arkiv för Math., t. 3, 1958, p. 555-568.

[3] ŁOJASIEWICZ (S.). - Sur le problème de la division, t. 18, 1959, p. 87-136 ; et Rozprawy Matemetyczne, 1961, n° 22, 57 p.

[4] MALGRANGE (Bernard). - Division des distributions, Séminaire Schwartz, t. 4, 1959/60, n° 21-25, 29 p.

[5] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, Tome 1, 2e édition. - Paris, Hermann, 1957 (Act. scient. et ind., 1245 ; Publ. Inst. Math. Strasbourg, 9).

[6] WHITNEY (H.). - Analytic extension of differentiable functions defined on closed sets, Trans. Amer. math. Soc., t. 36, 1934, p. 63-89.