

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

PAUL KRÉE

Espaces Hs. Lemme de commutation

Séminaire Henri Cartan, tome 16, n° 1 (1963-1964), exp. n° 8, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A8_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESPACES H^S . LEMME DE COMMUTATION

par Paul KRÉE

Les espaces H^S que nous considérons ci-après sont d'un emploi courant dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Le lemme de commutation sert pour le calcul symbolique approximatif de Calderon-Zygmund dans \mathbb{R}^n (exposé suivant). Et ce n'est qu'ensuite que ce calcul sera étendu à une variété réelle de classe C^∞ .

1. Notations.

(On pourra se reporter pour des renseignements complémentaires à l'exposé 1 ou à [5].)

s est un nombre réel quelconque.

$n =$ entier $\geq 1 =$ dimension d'un \mathbb{R} -espace vectoriel X (les éléments génériques sont notés x, y, \dots).

$E =$ l'espace vectoriel dual. (les éléments génériques sont notés ξ, η, \dots).

$\langle \xi, x \rangle =$ la forme bilinéaire reliant X et E . E est identifié au groupe topologique dual du groupe additif X : la dualité est donnée par

$$\langle \xi, x \rangle \rightarrow \exp(2\pi i \langle \xi, x \rangle) \quad .$$

N. B. - La lettre C est réservée pour désigner dans les calculs une constante que l'on n'a pas jugé utile d'explicitier, et qui peut varier d'une formule à la suivante.

Eléments non canoniques.

- une forme quadratique Q définie sur X , définie positive ;

- une base de X formée de vecteurs ortho-normés par rapport à Q

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$Q(x) = |x|^2 = \sum_1^n x_i^2 \quad ;$$

- la base duale de E :

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \quad ;$$

- la forme quadratique "duale" de Q :

$$|\xi|^2 = \sum_i \xi_i^2$$

- les mesures de Haar

$$dx = dx_1 \dots dx_n$$

$$d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_n \quad .$$

Pour voir que la théorie ci-après ne dépend pas du choix de ces éléments, on utilisera les remarques suivantes :

- sur un groupe abélien localement compact, toutes les mesures de Haar sont proportionnelles ;

- deux formes quadratiques $|\cdot|_1^2$ et $|\cdot|_2^2$ sur X définissent deux normes équivalentes : il existe C et C' tels que

$$C|\cdot|_2 \leq |\cdot|_1 \leq C'|\cdot|_2 \quad .$$

Fonctions et distributions.

Toutes les fonctions ou distributions sont à valeurs complexes. Comme elles sont définies sur X ou E , on utilisera la notation suivante :

$\mathcal{O}(X)$ = l'e. v. t. des fonctions C^∞ à support compact, définies sur X avec la topologie habituelle (définition analogue de $\mathcal{O}(E)$) ;

$\mathcal{S}(X)$ = le Fréchet des fonctions C^∞ sur X , qui sont à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées ;

$\mathcal{O}'(X)$ = l'espace des distributions ;

\mathcal{O}' est en dualité avec \mathcal{O} par la forme bilinéaire

$$\langle T, \varphi \rangle = \int T(x) \varphi(x) dx$$

\mathcal{O}' est en antidualité avec \mathcal{O} par la forme antilinéaire

$$(T | \varphi) = \langle T, \bar{\varphi} \rangle = \int T(x) \bar{\varphi}(x) dx$$

si k est un multi-indice,

$$k = k_1 \dots k_n$$

et

$$D^k = \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{k_n}$$

on rappelle que

$$\langle D^k T, \varphi \rangle = (-1)^{|k|} \langle T, D^k \varphi \rangle$$

$$(D^k T | \varphi) = (T | D^k \varphi) \quad .$$

Transformation de Fourier.

Pour toute φ de $\mathcal{S}(X)$ on pose

$$(F\varphi)(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = \int \exp(-2\pi i \langle x, \xi \rangle) \varphi(x) dx \quad .$$

On rappelle que l'on a des isomorphismes réciproques

$$\mathcal{S}(X) \xrightarrow[\mathcal{S}(\Xi)]{\mathcal{F}}$$

et l'on définit la transformation de Fourier des distributions tempérées par transposition des isomorphismes ci-dessus.

2. Espaces H^s (s réel quelconque).

(On devrait écrire $H^s(X)$ car les éléments de H^s sont des distributions sur X .)

2.1. Définition si s est un entier positif.

(On suppose donnée une mesure de Haar sur X , mais la forme quadratique est ici inutile.)

- pour $s = 0$

$$H^0 = L^2(X)$$

avec la norme

$$\|f\| = \left(\int |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

et le produit scalaire

$$(f | g) = \int f(x) \bar{g}(x) dx$$

- pour s dans \mathbb{N} , H^s est l'espace vectoriel des distributions T qui sont ainsi que toutes leurs dérivées distributions $D^\ell T$ d'ordre $|\ell| \leq s$, dans L^2 ; H^s est muni de la norme

$$\|T\|_s = \left(\sum_{|\ell| \leq s} \|D^\ell T\|^2 \right)^{1/2} \quad .$$

Comme T est tempérée, on peut chercher une autre expression de cette norme en considérant $\mathcal{F}T$ et en appliquant le théorème de Plancherel

$$\begin{aligned} \|T\|_s' &= \left(\sum_{|\ell| \leq s} \|\xi^\ell \hat{T}\|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\int (\hat{T}(\xi))^2 \left(\sum_{|\ell| \leq s} \xi^{2\ell} \right) d\xi \right)^{1/2} \end{aligned}$$

les transformées de Fourier \hat{T} des éléments de H^s sont donc de carré sommable par rapport à la mesure

$$\mu' = \sum_{|\ell| \leq s} \xi^{2\ell} d\xi$$

et la norme de T dans H^s , c'est la norme de \hat{T} dans $L^2_{\mu'}(\Xi)$. On obtiendra donc le même espace vectoriel, muni d'une norme équivalente, si l'on remplace μ' par une mesure μ équivalente (c'est-à-dire : $\exists C$ et C' tels que $C\mu \leq \mu' \leq C'\mu$).

D'où l'idée de prendre $\mu = (1 + |\xi|^2)^s d\xi$ une forme quadratique $\xi \rightarrow |\xi|^2$ étant choisie sur Ξ . Si l'on considère deux formes quadratiques $|\cdot|_1^2$ et $|\cdot|_2^2$ sur Ξ , les mesures μ associées sont équivalentes. D'où :

2.2. Définition si s est réel quelconque.

H^s est l'espace vectoriel des distributions tempérées f définies sur X dont la transformée de Fourier \hat{f} est une fonction de carré sommable par rapport à la mesure $(1 + |\xi|^2)^s d\xi$, $|\xi|^2$ étant une forme quadratique définie positive quelconque sur Ξ ; pour tout choix d'une telle forme, il est muni de la norme suivante qui en fait un espace de Hilbert :

$$\|f\|_s = \left(\int |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \right)^{1/2} .$$

On peut encore dire : $f \in \mathcal{S}'(X)$ est dans H^s si et seulement si $(1 + |\xi|^2)^{1/2} \hat{f}(\xi)$ est dans $L^2(\Xi)$ (L^2 par rapport à la mesure de Haar $d\xi$), et

$$\|f\|_s = \|(1 + |\xi|^2)^{1/2} \hat{f}(\xi)\|_{L^2(\Xi)} .$$

Si (en conservant toujours, pour l'instant, les mesures de Haar duales dx et $d\xi$ sur X et Ξ pour ne pas avoir d'ennuis dans la définition des distributions) on change la forme quadratique $|\xi|^2$ sur Ξ , les H^s ne changent pas, mais leur norme change. Ce sont donc des espaces hilbertisables plutôt qu'hilbertiens.

2.3. Densité de $\mathcal{S}(X)$ et de $\mathcal{Q}(X)$ dans H^s .

$\mathcal{S}(\Xi)$ étant dense dans $\mathfrak{H}^s = L^2_\mu(\Xi)$ (l'injection étant continue) il en résulte que $\mathcal{S}(X)$ est dense dans H^s . Comme \mathcal{Q} est dense dans \mathcal{S} , il en résulte que $\mathcal{Q}(X)$ est aussi dense dans H^s .

2.4. Emboîtement des H^s .

Pour tout t et tout s réels tels que $t \leq s$, on a une injection continue canonique

$$0 \rightarrow H^s \rightarrow H^t$$

(car μ est une fonction croissante de s).

2.5. Les isomorphismes $G_\rho = ((1 + |\xi|^2)^{\rho/2})$.

Pour tout ρ réel et pour toute forme quadratique $|\xi|^2$ définie positive sur Ξ , on note par G_ρ l'application

$$\mathcal{S}(X) \longrightarrow \mathcal{S}(X)$$

$$\varphi \rightsquigarrow G_\rho \varphi = \psi$$

$$\text{telle que } \hat{\psi} = (1 + |\xi|^2)^{\rho/2} \hat{\varphi} \quad .$$

1° Les G_ρ sont des isomorphismes.

2° Par transposition, ces isomorphismes se prolongent à $\mathcal{S}'(X)$ (définis de la même manière).

3° Ces isomorphismes forment un groupe commutatif

$$G_\rho \circ G_{\rho'} = G_{\rho'} \circ G_\rho = G_{\rho+\rho'} \quad .$$

4° Pour tout s , G_ρ induit une isométrie

$$H^s \rightarrow H^{s-\rho}$$

(ces espaces étant munis de la norme correspondant à $|\xi|^2$). Le cas particulier important c'est

$$L^2(X) = H^0 \rightarrow H^{-\rho} \quad .$$

2.6. Dual ou antidual de H^s : H^{-s} .

En effet comme on a

$$\mathcal{S}(X) \rightarrow H^s \rightarrow \mathcal{S}'(X)$$

les flèches étant des applications linéaires continues, injectives et d'images denses, on en déduit par anti-transposition

$$\mathcal{S}'(X) \leftarrow (H^s)^{\text{antidual}} \leftarrow \mathcal{S}(X)$$

les flèches étant toujours injectives et d'images denses. Cherchons alors quel est ce sous-espace $(H^s)^{\text{antidual}}$ de $\mathcal{S}'(X)$. Choisissons une forme quadratique sur X , $\hat{g} \in \mathcal{S}(\Xi)$ appartient à l'antidual de $\mathcal{F}(H^s(X))$ si et seulement si

$$\hat{f} \rightsquigarrow \int \hat{g} \overline{\hat{f}} d\xi, \quad ,$$

définie sur $\mathcal{S}(\Xi)$, se prolonge en une forme linéaire continue sur $\mathcal{F}(H^s(X))$. Mais cela s'écrit aussi

$$\int \left(\frac{\hat{g}(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^{1/2}} \right) \overline{\hat{f}(\xi)} (1 + |\xi|^2)^{1/2} d\xi \quad ;$$

donc \hat{g} appartient à l'antidual de $\mathcal{F}(H^s)$ si et seulement si

$$\hat{g}(\xi) (1 + |\xi|^2)^{-1/2} \text{ est dans } L^2, \quad ,$$

ou si

$$g \in H^{-s}(X) \quad .$$

En outre, la norme canonique de l'antidual de $H^s(X)$ est celle de $H^{-s}(X)$.

2.7. Etude du cas où s est entier positif.

Tout élément h de H^{-s} peut être représenté par une somme finie de dérivées de fonctions de L^2 .

Preuve. - M étant le nombre de multi-indices ℓ d'ordre $\leq s$, on considère l'application

$$\begin{aligned} H^s &\longrightarrow (H^0)^M \\ f &\rightsquigarrow (D^\ell f)_{|\ell|} \quad . \end{aligned}$$

Elle est continue injective, et, par cette application H^s s'identifie à un sous-espace vectoriel fermé de $(H^0)^M$; h étant une forme antilinéaire continue sur H^s , elle peut se prolonger à tout l'espace $(H^0)^M$ en une forme représentée par M fonctions h_ℓ de H^0 :

$$(f | h) = \sum (D^\ell f | h_\ell) = \sum (f | D^\ell h_\ell) \quad .$$

Cette représentation s'applique en particulier à δ (dans H^s si $s < -\frac{n}{2}$).

2.8. Régularité : k étant un entier positif.

$s > \frac{n}{2} + k \implies$ les éléments de H^s sont de classe C^k .

Preuve. - l étant un multi-indice d'ordre $\leq k$ pour prouver que $D^l f$ est continue (f dans H^s) il suffit de prouver que

$$\widehat{D^l f} = \xi^l \hat{f}(\xi)$$

est sommable. Or

$$\int |\xi^l| |\hat{f}(\xi)| d\xi = \int |\hat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^2)^{s/2} \frac{|\xi^l|}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}} d\xi .$$

Il suffit d'utiliser l'inégalité de Schwarz.

On définit alors

$$H^\infty = \bigcap_{L^2} = \lim_{\leftarrow} H^s = \bigcap H^s$$

ses éléments sont C^∞ .

2.9. Opérations (α) .

Pour toute α de $\mathcal{S}(X)$, (α) désigne l'application

$$\mathcal{S}'(X) \rightarrow \mathcal{S}'(X)$$

(α) applique continûment H^s dans H^s .

Preuve. - utilisant les isomorphismes G_ρ , il suffit de voir que

$$\begin{array}{ccc} H^0 & \xrightarrow{G_\rho} & H^s \\ & & \uparrow (\alpha) \\ H^0 & \xrightarrow{G_\rho} & H^s \end{array}$$

$G_\rho(\alpha)$ opère de H^0 dans H^0 , ou même, par Plancherel, et vu la densité de \mathcal{S} dans H^0 :

$$\exists C, \forall \varphi \text{ dans } \mathcal{S}, \|\mathbb{T}\varphi\| \leq C\|\varphi\| \text{ (normes dans } L^2 \text{)}$$

avec

$$(\mathbb{T}\varphi)(\xi) = \int_{\eta \in \Xi} \hat{\alpha}(\xi - \eta) \frac{(1 + |\xi|^2)^{s/2}}{1 + |\eta|^2} \varphi(\eta) d\eta .$$

Ceci résulte des quatre remarques suivantes.

(a) $\forall s : (1 + |\xi|^2)^{s/2} \leq 2^{|s|/2} (1 + |\eta|^2)^{s/2} (1 + |\xi - \eta|^2)^{|s|/2}$ (l'inégalité pour s négatif, se déduit trivialement de l'inégalité pour $s > 0$; pour $s > 0$, il suffit de remarquer que

$$1 + (a + b)^2 \leq 2(1 + a^2)(1 + b^2) \quad a \text{ et } b \text{ réels } \geq 0$$

(b) on a $|(T\varphi)(\xi)| \leq (\gamma * |\varphi|)(\xi)$ avec $\gamma(\xi) = C |\hat{\alpha}(\xi)| (1 + |\xi|^2)^{|s|/2}$

(c) $\hat{\alpha}$ est à décroissance rapide, donc quel que soit s ,

$$|\hat{\alpha}(\xi)| (1 + |\xi|^2)^{|s|/2}$$

est dans $L^1(\Xi)$.

(d) La convolution par une fonction de L^1 envoie L^2 dans L^2 .

2.10. Opérations (ρ_0) .

β étant une fonction localement sommable tempérée sur Ξ on désigne par (β) la transformation de $\mathcal{S}(X)$ dans $\mathcal{S}'(X)$: $f \rightarrow g$ avec $\hat{g} = \beta \hat{f}$ ou $g = (\overline{\beta}) * f$.

3. Lemme de commutation.

Soit α dans $\mathcal{S}(X)$, soit $\beta = \beta_0(\xi) (1 + |\xi|^2)^{\rho/2}$ avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \text{ réel quelconque,} \\ \beta_0 \text{ dans } L^\infty(\Xi), \\ \beta_0 \text{ continûment dérivable dans le complémentaire d'un compact, avec} \end{array} \right.$$

$$\forall i, \left| \left(\frac{\partial \beta}{\partial \xi_i} \right) (\xi) \right| = o\left(\frac{1}{|\xi|}\right) \text{ à l'infini.}$$

Alors, pour tout s

$$[(\alpha), (\beta)] = (\alpha)(\beta) - (\beta)(\alpha)$$

opère continûment de H^s dans $H^{s-\rho+1}$.

En décomposant ce crochet, on voit qu'il est clair qu'il opère de H^s dans $H^{s-\rho}$

$$\begin{array}{ccc}
 H^0 & \xrightarrow{G_{s-\rho+1}} & H^{s-\rho+1} \\
 & & \uparrow \\
 H^0 & \xrightarrow{G_{-s}} & H^s
 \end{array}
 \quad [(\alpha), (\beta)]$$

Utilisant les G_ρ il suffit de vérifier que

$$G_{s-\rho+1} [(\alpha) - (\beta)(\alpha)] G_{-s}$$

opère dans H^0 , ou même avec Plancherel et la densité de S dans H^0 :

$$\exists C, \forall \varphi \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{E}), \|\mathbb{T}\hat{\varphi}\| \leq C\|\hat{\varphi}\| \quad (\text{normes dans } L^2)$$

avec

$$\begin{aligned}
 & (\mathbb{T}\hat{\varphi})(\xi) \\
 &= (1 + |\xi|^2)^{1/2} \int_{\eta} \hat{\alpha}(\xi - \eta) \left\{ \left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2} \right)^{(s-\rho)/2} \beta_0(\eta) - \left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2} \right)^{s/2} \beta_0(\xi) \right\} \varphi(\eta) d\eta.
 \end{aligned}$$

Vu les résultats du § 2, s'il n'y avait pas le facteur $(1 + |\xi|^2)^{1/2}$ devant l'intégrale, le résultat serait évident. D'autre part l'accolade est nulle pour $n = \xi$. D'où l'idée de se ramener à démontrer que

$$\exists C, \forall \varphi \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{E}), \forall i = 1 \text{ ou } 2, \int_{|\xi| \geq R} |(\mathbb{T}_i \hat{\varphi})(\xi)|^2 d\xi \leq C\|\hat{\varphi}\|^2$$

avec

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{T}_1 \hat{\varphi})(\xi) &= (1 + |\xi|^2)^{1/2} \int_{|\eta - \xi| \leq (|\xi|)/2} \dots \\
 (\mathbb{T}_2 \hat{\varphi})(\xi) &= (1 + |\xi|^2)^{1/2} \int_{|\eta - \xi| \geq (|\xi|)/2} \dots
 \end{aligned}$$

Pour $i = 1$, on pose

$$\zeta = \eta - \xi$$

et

$$\text{accolade} = \{ \} = \Phi(\zeta) = \Phi(\zeta) - \Phi(0)$$

La formule des accroissements finis donne alors

$$|\{ \}| \leq \frac{C|\xi - \eta|}{(1 + |\xi|^2)^{1/2}}$$

et alors $(\mathbb{T}_1 \hat{\varphi})$ est majoré par la convolution de $|\hat{\varphi}|$ par une fonction sommable.

Pour $i = 2$, on obtiendra la majoration souhaitée comme suit. Puisque $\hat{\alpha}$ est à décroissance rapide, on a avec k arbitrairement grand et C dépendant de k :

$$|(T_2 \varphi)(\xi)| \leq (1 + |\xi|^2)^{1/2} \int_{|\eta - \xi| \geq (|\xi|)/2} C \frac{(1 + |\xi - \eta|^2)^\ell}{(1 + |\xi - \eta|^2)^k} |\varphi(\eta)| d\eta$$

SCHWARZ donne :

$$|(T_2 \varphi)(\xi)|^2 \leq (1 + |\xi|^2) \|\varphi\|^2 C \int_{|\eta| \geq (|\xi|)/2} \frac{d\eta}{(1 + |\eta|^2)^{2k-2\ell}} \cdot$$

On termine alors, par exemple en écrivant $2k - 2\ell = k' + \eta$ (k' arbitrairement grand puisque k l'est) d'où

$$|(T_2 \varphi)(\xi)|^2 \leq C (1 + |\xi|^2) \|\varphi\|^2 \frac{1}{(1 + \frac{|\xi|^2}{4})^{k'}}$$

et il suffit d'intégrer, pour trouver $\|T_2 \varphi\|^2 \leq C^2 \|\varphi\|^2$.

4. Opérateurs très réguliers.

PROPOSITION. - Soit α dans $\mathcal{S}(X)$. Soit $\beta \in \mathcal{S}'(\Xi)$, C^∞ est homogène de degré quelconque dans le complémentaire d'un compact. Alors les opérateurs (a) et (b) de $\mathcal{O}(X)$ dans $\mathcal{O}'(X)$ sont très réguliers.

Preuve. - Cela signifie que ce sont en fait des applications linéaires continues.

(i) $\Phi : \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{E}(X)$

(ii) qui se prolongent continûment en

$$\tilde{\Phi} : \mathcal{E}'(X) \rightarrow \mathcal{O}'(X)$$

(iii) de façon que le support singulier n'augmente pas : pour toute T de $\mathcal{E}'(X)$

$$\text{Supp sing } \tilde{\Phi}(T) \subseteq \text{Supp sing } T$$

(le support singulier d'une distribution est le complémentaire du plus grand ouvert où elle est une fonction C^∞).

Pour (a) ceci est clair.

Pour (b) l'opérateur est une convolution avec $\gamma = \overline{\mathcal{E}}\beta$, donc seule la condition (iii) n'est pas évidente.

Montrons que γ est C^∞ en dehors de l'origine de X . On prend une fonction ζ sur E , à support compact et valant 1 sur un voisinage du compact en dehors duquel β est homogène

$$\beta = \beta\zeta + \beta(1 - \zeta) \quad ;$$

$\beta(1 - \zeta)$ est C^∞ d'où

$$\gamma = \overline{\mathcal{F}}(\beta\zeta) + \overline{\mathcal{F}}(\beta(1 - \zeta)) \quad .$$

Le premier terme du deuxième membre est différentiable (et même analytique) d'après PALEY WIENER. Pour prouver que pour tout multi-indice k , $D^k(\beta(1 - \zeta))$ est continue en dehors de l'origine, il suffit de prouver que pour un certain $l \in \mathbb{N}$

$$|x|^{2k} D^k \overline{\mathcal{F}}\beta(1 - \zeta)$$

est continue ; ou bien que le transformé de Fourier de cette dernière expression, donc $\Delta^k[\xi^k \beta(1 - \zeta)]$, est sommable : il en est bien ainsi car à chaque dérivation, le degré d'homogénéité est diminué d'une unité.

Reste à voir que la convolution avec γ , distribution de support singulier vide ou réduit à l'origine, a la propriété (iii). Or, si T est une distribution de support singulier A , on a $T = T_1 + T_2$, où T_1 est à support dans un petit voisinage de A , et T_2 est C^∞ . Ensuite $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, où γ_1 est à support dans un petit voisinage de l'origine, et γ_2 est C^∞ . Alors

$$T \star \gamma = T_1 \star \gamma_1 + \text{fonction } C^\infty \quad ,$$

et le support de $T_1 \star \gamma_1$ est dans un petit voisinage de A ; le support singulier de $T \star \gamma$, contenu dans un voisinage arbitraire de A , est donc dans A .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HÖRMANDER (Lars). - Linear partial differential operators. - Berlin, Springer, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften ..., 116).
- [2] LIONS (Jacques L.). - Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Séminaire de Mathématiques supérieures, Été 1962. - Montréal, Université de Montréal, Département de Mathématiques, 1962 (multigr.).
- [3] MALGRANGE (Bernard). - Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 283-306.
- [4] MALGRANGE (Bernard). - Noyaux valeurs principales, Séminaire Schwartz, t. 4, 1959/60 : Unicité du problème de Cauchy, division des distributions, n° 5-6, 7 et 4 pages.

- [5] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, Tomes 1 (2e éd.) et 2.
- Paris, Hermann, 1951-1957 (Act. scient. et ind., 1091 = 1245 et 1122 ;
Eléments de Mathématique, 9 et 10).
- [6] SCHWARTZ (Laurent). - Ecuaciones diferenciales parciales elipticas. - Bogota,
Universidad nacional de Columbia, 1956 (multigr.).
-