SÉMINAIRE JEAN LERAY.
SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LAURENT SCHWARTZ

Un théorème de convergence dans les $L^p, 0 \leq p < +\infty$

Séminaire Jean Leray, nº 2 (1969-1970), p. 15-17
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969-1970___2_15_0>

UN THÉORÈME DE CONVERGENCE DANS LES L^p, $0 \leq p < +\infty$

par M. LAURENT SCHWARTZ [1]

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $L^p(\Omega,\mu)$, $0 \leq p < +\infty$, telle que, pour toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels tendant vers zéro $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ converge aussi.

Soit E un espace vectoriel topologique. Une suite $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E sera appelée C-suite, si, pour toute suite scalaire $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers zéro, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X_n$ converge dans E . On dira que E est un C-espace, si, pour toute C-suite X, $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ converge. Les C-espaces ont été étudiés par Erik Thomas [2] ; un espace localement convexe séquentiellement faiblement complet est un C-espace, en particulier tous les espaces $L^p(\Omega,\mu)$ pour $1 \leq p < +\infty$. Par contre, sauf si μ est combinaison finie de mesures de Dirac, $L^\infty(\Omega,\mu)$ n'est pas un C-espace.

THÉORÈME. <u>Lespace</u> $L^p(\Omega,\mu)$, <u>pour</u> $0 \leq p < 1$, <u>est aussi un</u> C-<u>espace</u> [3].

Ces espaces ne sont plus localement convexes. $L^\circ(\Omega,\mu)$ est l'espace des μ-classes de fonctions μ-mesurables sur Ω , muni de la topologie de la convergence en mesure.

LEMME 1. <u>Soit</u> $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>une</u> C-<u>suite de</u> $L^\circ(\Omega,\mu)$. <u>Sur tout ensemble de</u> μ-<u>mesure finie</u>, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |X_n|^2$ <u>converge</u> μ-<u>presque partout</u>.

Ce lemme est dû à Kolmogorov et Khintchine [4].

LEMME 2. <u>Soit</u> $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>une</u> C-<u>suite de</u> $L^p(\Omega,\mu)$, $0 \leq p < 1$. <u>Alors</u> X_n <u>converge vers zéro pour</u> n <u>infini</u> .

<u>Démonstration</u>. D'après le lemme 1, X_n converge vers zéro μ-presque partout sur tout ensemble de μ-mesure finie, donc dans $L^\circ(\Omega,\mu)$; ce qui montre le lemme pour $p = 0$. Soit donc $0 < p \leq 1$. D'après Egorov, on peut trouver une partition de Ω ,

$$\Omega = \bigcup_{m=0}^{\infty} \Omega_m \cup N ,$$

telle que chaque Ω_m soit μ-mesurable de μ-mesure finie, que X_n converge vers zéro pour n infini uniformément sur chaque Ω_m , et que tous les X_n soient μ-presque partout nuls sur N . Supposons que X_n ne converge pas vers zéro dans L^p pour n infini. Il existe alors $\delta' > 0$ tel que $\int |X_n|^p \geq \delta'$

(1) reproduit une note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t. 268, p. 704-706 (31 mars 1969) série A .

pour une infinité de valeurs de n. Soit $0 < \delta < \delta'$. Déterminons par récurrence une suite de parties disjointes de Ω, $(A_k)_{k\in N}$, chacune réunion d'Ω_m, et une suite strictement croissante d'entiers, $(n_k)_{k\in N}$, de manière que $\int_{A_k} |X_{n_k}|^p \geqq \delta$, et que, pour $j \neq k$,

$$\int_{A_j} |X_{n_k}|^p \leqq 1/2^{j+k} .$$

Déterminons d'abord A_o, n_o. Nous prendrons n_o tel que $\int |X_{n_o}|^p > \delta$; il existe alors A_o, réunion finie d'Ω_m, tel que $\int_{A_o} |X_{n_o}|^p \geqq \delta$. Supposons déterminés A_k et n_k jusqu'à $k = \ell-1$. Il existe B_ℓ, réunion finie d'Ω_m, contenant $A_o \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{\ell-1}$, tel que

$$\int_{\complement B_\ell} |X_{n_k}|^p \leqq 1/2^{k+\ell}$$

pour tout $k \leqq \ell-1$. Il existe ensuite $n_\ell > n_{\ell-1}$ tel que $\int |X_{n_\ell}|^p \geqq \delta'$, et que $\int_{B_\ell} |X_{n_\ell}|^p$ soit $\leqq 1/2^{2\ell}$ et $< \delta' - \delta$, de sorte que

$$\int_{\complement B_\ell} |X_{n_\ell}|^p > \delta .$$

Il existe alors A_ℓ, réunion finie d'Ω_m, contenue dans $\complement B_\ell$, tel que

$$\int_{A_\ell} |X_{n_\ell}|^p \geqq \delta .$$

Alors

$$\int_{A_k} |X_{n_k}|^p \geqq \delta , \int_{A_j} |X_{n_k}|^p \leqq \frac{1}{2^{j+k}} \text{ pour } j \leqq \ell ,, k \leqq \ell , \ j \neq k .$$

Soit alors $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, $0 \leqq c_n \leqq 1$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n^p = +\infty$. Minorons

$$I = \int \left|\sum_{k=0}^{\ell} c_k X_{n_k}\right|^p .$$

D'abord

$$\left|\sum_{k=0}^{\ell} c_k X_{n_k}\right|^p \geqq c_j^p |X_{n_j}|^p - \sum_{k\leqq\ell, k\neq j} c_k^p |X_{n_k}|^p ,$$

donc

$$I \geqq \sum_{j=0}^{\ell} \int_{A_j} \geqq \sum_{j=0}^{\ell} \int_{A_j} (c_j^p |X_{n_j}|^p - \sum_{k\leqq\ell, k\neq j} c_k^p |X_{n_k}|^p) \geqq \sum_{j=0}^{\ell} c_j^p \delta - \sum_{j,k=0}^{\ell} \frac{1}{2^{j+k}} \geqq \delta \sum_{j=0}^{\ell} c_j^p - 4 .$$

Comme $\sum_{j=0}^{\infty} c_j^p = +\infty$, on voit que $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k X_{n_k}$ ne converge pas dans L^p , ce qui contredit les hypothèses, car $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est aussi une C-suite.

Bien que le résultat soit connu pour $1 < p < +\infty$, on le démontrerait de manière tout analogue, en utilisant l'inégalité de Minkowski.

Démonstration du théorème. Il suffit maintenant de montrer que, si E est un espace vectoriel topologique complet dans lequel toute C-suite converge vers zéro, E est un C-espace. Si en effet, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une C-suite, et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ ne converge pas, elle ne vérifie pas le critère de Cauchy. Donc il existe un voisinage V de zéro dans E , et une suite strictement croissante d'entiers

$$n_o, n_o', n_1, n_1', \ldots, n_k, n_k', \ldots$$

tels que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $S_{n_k'} - S_{n_k} \notin V$, où $S_N = \sum_{n\leq N} X_n$. Si nous posons $Y_k = S_{n_k'} - S_{n_k}$, c'est encore une C-suite, or elle ne converge pas vers zéro, ce qui est contradictoire, d'où le théorème.

(1) Sous le nom d'espaces faiblement Σ-complets : cf. Comptes rendus, 267, série A, 1968, p. 7.

(2) Pour $p = 0$, cf. Paul LEVY, Comptes rendus, 265, série A, 1967, p. 470.
Le même résultat, pour $p = 0$, vient d'être démontré indépendamment par Richard DUDLEY, Proc. Amer. Math. Soc. (à paraître)

(3) KOLMOGOROV-KHINTCHINE, Math. Sbornik, 32, 1925, p. 668-677. Voir aussi KWAPIEN, Comptes rendus, 267, série A, 1968, p. 698.