Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Laurent Schwartz

Un théorème de dualité pour les applications radonifiantes

Séminaire Jean Leray, nº 2 (1969-1970), p. 18-24
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969-1970___2_18_0>

UN THÉORÈME DE DUALITÉ POUR LES APPLICATIONS RADONIFIANTES

par M. LAURENT SCHWARTZ(1)

Les théorèmes indiqués ici ont intérêt, pour les applications pratiques, à être énoncés dans des conditions très générales ; toutefois, bien que la démonstration ne soit pas plus difficile, leur énoncé devient alors long et compliqué, et dépasse le cadre d'une Note. Nous nous bornerons donc à un cas particulier, utilisant notamment des espaces de Banach, quitte à donner des exemples qui nécessiteraient le traitement général.

1. Théorèmes généraux.

DÉFINITIONS.- Soit E un Banach, λ une probabilité cylindrique sur E(2); on dit qu'elle est p-typique ($0 \leqq p \leqq \infty$) si, pour toute fonction aléatoire f associée sur E', $f : E' \to L^\circ(\Omega,\mu)$, f est continue de E' dans $L^p(\Omega,\mu)$. Elle est dite p-typique approximable, si, en outre, on peut choisir (Ω,μ,f) de manière que f soit adhérente, pour la topologie de la convergence simple, à un ensemble équicontinu d'applications linéaires de rang fini de E' dans $L^p(\Omega,\mu)$ [ceci sera toujours le cas si E' a la propriété d'approximation métrique (3), ou si $p \geqq 1$, car alors L^p a cette propriété]. On dira que λ est une mesure de Radon d'ordre p, si elle est de Radon, et si la norme de E est dans $L^p(E,\lambda)$. Une application linéaire continue $u : E \to F$ sera dite p-radonifiante, si, pour toute probabilité cylindrique λ sur E, p-typique, l'image $u\lambda$ est de Radon d'ordre p sur F. Elle sera dite approximativement p-radonifiante, si ceci est seulement vrai pour les λ p-typiques approximables.

THÉORÈME 1. <u>Soit</u> $f : E' \to L^p(\Omega,\mu)$ <u>une fonction aléatoire linéaire continue sur</u> E', λ <u>une probabilité cylindrique associée</u>. <u>Pour que</u> λ <u>soit de Radon d'ordre</u> p, <u>il faut et il suffit que</u> f <u>soit réalisable à partir d'une fonction</u> $\varphi : \Omega \to E$ <u>appartenant à</u> $L^p(\Omega,\mu;E)$, <u>avec</u> $f(\xi) = \langle \varphi,\xi \rangle$ <u>pour</u> $\xi \in E'$. [On dit que $\varphi \in L^p(\Omega,\mu;E)$, si φ est μ-mesurable, et si, pour $p > 0$, $\|\varphi\|$ est dans $L^p(\Omega,\mu)$.]

---

(1) reproduit une Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t. 268, p. 1410-1413 (9 juin 1969) et p. 1612-1615 (30 juin 1969), série A.

(2) On utilisera les notations des Notes ux C.R. Acad. Sc. Paris, 265, série A, 1967, p. 832 ; 266, série A, 1968, p. 7 et 50 ; 268, série A, 1969, p. 646.

(3) Voir A. GROTHENDIECK, <u>Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires</u> (Mém. Amer. Math. Soc., n° 16, 1955 ; voir chap. I, § 5). On ignore si tout espace de Banach a la propriété d'approximation métrique (conjecture de Banach).

THÉORÈME 2 (théorème de Prokhorov généralisé)(1). Soit $f : E' \to L^p(\Omega,\mu)$ une fonction aléatoire linéaire continue. Supposons que f soit adhérente, pour la topologie de la convergence simple, à un ensemble de fonctions $f_i : E' \to L^p(\Omega,\mu)$, réalisables par des applications $\varphi_i : \Omega \to E$, formant une partie bornée de $L^p(\Omega,\mu;E)$. Alors la probabilité cylindrique λ associée à f est de Radon d'ordre p sur $\sigma(E'',E')$ (c'est-à-dire de Radon sur $\sigma(E'',E')$, et telle que la norme de E'' soit dans $L^p(\sigma(E'',E'),\lambda))$, de Radon d'ordre p sur E si E est réflexif. En outre, elle est réalisable par une application $\varphi : \Omega \to \sigma(E'',E')$, μ-mesurable, $\|\varphi\| \in L^p(\Omega,\mu)$, si E est réflexif ou E' séparable ; et $\varphi \in L^p(\Omega,\mu;E)$ si E est réflexif.

THÉORÈME 3. Soit $p > 0$. Soit $u : E \to F$ une application linéaire continue. Pour qu'elle soit approximativement p-radonifiante (donc p-radonifiante si E' a la propriété d'approximation métrique ou si $p \geqq 1$) de E dans $\sigma(F'',F')$ (donc de E dans F si F est réflexif), il faut et il suffit qu'elle vérifie la propriété suivante : il existe $M \geqq 0$ tel que pour tout Ω,μ, pour toute fonction $\varphi \in L^p(\Omega,\mu;E)$, on ait l'inégalité

$$(1) \qquad \|u \circ \varphi\|_{L^p(\Omega,\mu;F)} \leqq M \sup_{\xi \in E', \|\xi\| \leqq 1} \|\langle \varphi,\xi \rangle\|_{L^p(\Omega,\mu)} .$$

Il existe une condition analogue pour $p = 0$, mais plus compliquée à écrire.

COROLLAIRE 1. Soient $0 < p \leqq q \leqq +\infty$. Toute application linéaire continue de E dans F, approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(F'',F')$, est aussi approximativement q-radonifiante.

C'est immédiat ; considérons les $\varphi \in L^q(\Omega,\mu;E)$ et les $\alpha \in L^r(\Omega,\mu)$,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} .$$

Alors :

$$\|u\varphi\|_{L^q(\Omega,\mu;F)} = \sup_{\|\alpha\|_r \leqq 1} \|\alpha u\varphi\|_{L^p(\Omega,\mu;F)}$$

$$\leqq \sup_{\|\alpha\|_r \leqq 1, \|\xi\| \leqq 1} \|\langle \alpha\varphi,\xi \rangle\|_{L^p(\Omega,\mu)} = \sup_{\|\xi\| \leqq 1} \|\langle \varphi,\xi \rangle\|_{L^q(\Omega,\mu)} .$$

Le même résultat, avec des applications radonifiantes de E dans F, est vrai et résulte du théorème 1.

Je ne sais pas si ce résultat subsiste pour $p = 0$.

COROLLAIRE 2. Soient $u : E \to F$ et $v : E \to G$, des applications linéaires continues, telles que, pour tout $x \in E$, on ait $\|v(x)\| \leqq \|u(x)\|$. Si alors u est approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(F'',F')$, v est approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$.

2. Le théorème de dualité.- Soit λ une probabilité cylindrique sur E ; on dit qu'elle est p-cotypique, si, pour les fonctions aléatoires associées $f : E' \to L^{\circ}(\Omega,\mu)$, la convergence de $f(\xi)$ vers 0 dans $L^p(\Omega,\mu)$ entraîne celle de ξ dans E'. Nous donnerons ensuite des exemples.

THÉORÈME 4 (Théorème de dualité). Soit u une application linéaire continue de E dans F. Supposons qu'il existe une probabilité cylindrique γ sur E, p-cotypique, dont l'image $u\gamma$ par u soit une probabilité de Radon d'ordre p sur $\sigma(F'',F')$. Alors la transposée ${}^t u$ est approximativement p-radonifiante (et p-radonifiante si F a la propriété d'approximation métrique ou si $p \geqq 1$) de $\sigma(F',F)$ dans $\sigma(E',E)$, et de F' dans E' si E est réflexif.

Le principe de la démonstration consiste à prouver, par Fubini, que ${}^t u$ vérifie l'inégalité (1) du théorème 3, ou celle qui lui correspond pour $p = 0$.

3. Applications.- Il semble qu'un grand nombre de résultats jusqu'ici disparates du calcul des probabilités puissent se démontrer par application directe de ce théorème 4. En outre, l'application est remarquablement rapide. Il y a toutefois avantage à mettre en évidence E' et F plutôt que E et F. Une probabilité cylindrique γ sur E, p-cotypique, sera plutôt appelée une probabilité (p,E')-cotypique ; $u\gamma$ est de Radon d'ordre p sur F. Si alors λ est une probabilité cylindrique sur $\sigma(F',F)$, p-typique, elle sera une probabilité cylindrique (p,F)-typique ; et $u\lambda$ sera de Radon d'ordre p sur E' (*-faible). En remplaçant E',F par U, V, et en faisant abstraction des topologies fortes ou faibles : s'il existe γ, (p,U)-cotypique, $u\gamma$ de Radon d'ordre p sur V, alors pour toute λ, (p,V)-typique, ${}^t u\lambda$ est de Radon d'ordre p sur U.

Exemple 1. Considérons l'espace de suites ℓ^s, $0 < s \leqq 2$. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi stable, d'image de Fourier $\exp(|\tau|^s)$. Si

$$c \in L^s, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n Z_n$$

suit une loi analogue, d'image de Fourier $\exp(-|\|c\|_s \tau|^s)$. Donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n Z_n$$

converge vers zéro en probabilité ou en moyenne d'ordre p quelconque fini pour $s = 2$, en probabilité ou en moyenne d'ordre p quelconque $< s$ pour $s < 2$, si et seulement si c converge vers zéro dans ℓ^s. Donc $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une probabilité cylindrique γ, (p,ℓ^s)-cotypique [et aussi (p,ℓ^s)-typique !] pour les valeurs de p indiquées. Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, et supposons que la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n Z_n|^q$$

converge presque partout, avec

$$\text{Espérance } (\sum |\alpha_n Z_n|^q)^{p/q} < +\infty .$$

Alors, si u est la multiplication par α, $u\gamma$ sera de Radon d'ordre p sur ℓ^q. On en déduira (en prenant $U = \ell^s$, $V = \ell^q$) que, pour toute suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires (p,ℓ^q)-typique,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n X_n|^s$$

converge presque sûrement, avec :

$$\text{Espérance } (\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n X_n|^s)^{p/s} < +\infty .$$

Ce sont ces résultats que nous avons appliqués pour trouver toutes les applications radonifiantes des ℓ^ρ dans les ℓ^σ (avec $p = 0$). On voit la nécessité de sortir des espaces de Banach (ℓ^s n'est pas localement convexe pour $s < 1$).

Exemple 2. Appelons $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, égales à ± 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ (jeu de pile ou face). On voit aisément que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n Z_n$$

converge vers zéro en probabilité, ou en moyenne de tout ordre p fini, si, et seulement si, $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro dans ℓ^2 (1). Donc $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une probabilité cylindrique γ, (p,ℓ^2)-cotypique [et aussi (p,ℓ^2)-typique]. Or, les $|Z_n|$ sont bornées par 1. Donc le théorème de dualité donnera (avec $E = \ell^2$, $F + c^\circ$, $u =$ identité) :

(P 2) L'injection canonique de $\sigma(\ell^1, c^\circ)$ dans ℓ^2 est p-radonifiante pour tout $p \geq 0$, fini ou non.

C'est la généralisation d'un théorème de Kolmogorov-Khintchine-Kwapien (2).

Exemple 3. Considérons la suite de variables aléatoires $(\omega \to e^{ni\omega})_{n\in\mathbb{Z}}$. En appelant $\mathcal{F}L^p$ l'espace des suites de coefficients de Fourier de fonctions de L^p, $1 \leq p \leq +\infty$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{ni\omega}$$

---

(1) Voir, par exemple, M. LOEVE, Probability theory, Van Nostrand, Londres, 1963, chap. V.

(2) Voir, par exemple, S. KWAPIEN, Comptes rendus, 267, série A, 1968, p. 698.

converge vers zéro dans L^p si, et seulement si, $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ converge vers zéro dans $\mathcal{F}L^p$; donc, $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définit une probabilité cylindrique $(p,\mathcal{F}L^p)$-cotypique (et aussi typique). Or, les $|Z_n|$ sont bornées par 1, donc cette probabilité est de Radon d'ordre p sur $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$. Le théorème de dualité donne :

(P 3) <u>L'injection canonique de</u> $\sigma(\ell^1, c^\circ)$ <u>dans</u> $\mathcal{F}L^p$ <u>est</u> p-<u>radonifiante pour</u> $1 < p \leqq +\infty$.

(P 3) est moins bon que (P 2) pour $p \leqq 2$, mais meilleur pour $p \geqq 2$.

Donnons maintenant une application de (P 3). Si les Z_n sont des variables aléatoires indépendantes, suivant la loi de Gauss normale, ou celle de pile ou face (exemple 1), $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définit une probabilité cylindrique p-typique sur ℓ^2 pour tout p fini ; donc, si

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 < \infty ,$$

$(\alpha_n Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définit une probabilité cylindrique p-typique sur ℓ^1 pour tout p fini. Il en est de même si les Z_n sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi stable d'indice s , $s < 2$, et si

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^s < +\infty ,$$

et $p < s$. Donc l'application de (P 2) et (P 3) donne :

(P' 3) <u>Si</u> Z_n <u>est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Gauss normale</u>, <u>ou la loi de pile ou face</u>, <u>et si</u>

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 < +\infty ,$$

<u>la suite</u> $(\alpha_n Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ <u>est dans</u> $\mathcal{F}L^p$ <u>pour tout</u> p <u>fini</u> $\geqq 1$; <u>si les</u> Z_n <u>suivant la loi stable d'indice</u> s , <u>et si</u>

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^s < +\infty ,$$

<u>la suite</u> $(\alpha_n Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ <u>est presque sûrement dans</u> ℓ^2.

C'est le théorème de Paley-Zygmund [1].

<u>Exemple</u> 4. Soit T un compact muni d'une probabilité de Radon $\nu \geqq 0$. L'application identique de $L^p(T,\nu)$, $1 \leqq p \leqq +\infty$, est une probabilité cylindrique de p-cotype (et p-type) L^p. Or, son image dans $\sigma(C',C)$ (espace des mesures de Radon sur T) est une probabilité de Radon d'ordre p sur $\sigma(C',C)$ [c'est la mesure canonique de $\sigma(C',C)$ définie par ν, c'est-à-dire l'image de la mesure ν sur T par l'application $t \to \delta_{(t)}$ de T dans $\sigma(C',C)$]. Le théorème de dualité donne alors :

(1) Voir J.P. KAHANE, <u>Some random series of functions</u>, Heath mathematical monographs, 1968, propos. 10, p. 44. Un certain nombre de théorèmes de ce livre relèvent des méthodes précédentes.

(P 4) <u>L'application identique de</u> $C(T)$ <u>dans</u> $L^p(T,\nu)$ <u>est</u> p-<u>radonifiante, pour</u> $1 < p < +\infty$.

On peut d'ailleurs le voir directement de façon très élémentaire.

Raisonnons en particulier sur la droite $\mathbb{R}$; elle n'est pas compacte, mais nous prendrons pour ν la mesure de Lebesgue, et remplacerons L^p par L^p_{loc} . Pour tout espace de distributions W sur $\mathbb{R}$, appelons W^α l'espac" des distributions dont la dérivée d'ordre « fractionnaire » $\alpha\in\mathbb{R}$ est dans W. Cet espace dépend en fait de la manière de définir la dérivation fractionnaire d'ordre α ; mais, si nous nous bornons à écrire qu'une distribution sur $\mathbb{R}$ appartient à W^α pour tout $\alpha < \alpha_0$, c'est indépendant du procédé choisi, pour tous les bons espaces W . Les $(L^2)^\alpha$ sont les espaces de Sobolev H^α. Alors, l'injection $C^\rho \to (L^p_{loc})^\rho$ est p-radonifiante, $1 < p < +\infty$.

Considérons alors l'injection canonique de $(L^a_{loc})^\alpha$ dans $(L^b_{loc})^\beta$, pour $\alpha - \beta > (1/a - 1/b)^+$ (inégalités de Sobolev) [1]. Elle sera sûrement p-radonifiante si on peut la factoriser par des applications identiques

$$(L^a_{loc})^\alpha \to C^\rho \to (L^p_{loc})^\rho \to (L^b_{loc})^\beta .$$

D'où :

(P' 4) <u>L'application identique de</u> $(L^a_{loc})^\alpha$ <u>dans</u> $(L^b_{loc})^\beta$ <u>est sûrement</u> p-<u>radonifiante si</u>

$$\alpha - \beta > \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{b}\right)^+ , \qquad 1 \leq p \leq +\infty , \qquad 1 \leq a \leq +\infty , \qquad 1 \leq b \leq +\infty .$$

Rien ne dit bien sûr que cette condition suffisante soit nécessaire, car les inégalités de Sobolev ne sont pas égalités. Néanmoins, assez curieusement, le résultat précédent donne les résultats connus pas trop fins sur les propriétés höldériennes des processus à accroissements indépendants. En effet, en prenant $a = 2$, $b = +\infty$, on voit que l'injection canonique de $(L^2_{loc})^1$ dans C^σ est p-radonifiante, dès que $\sigma < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$, $1 \leq p \leq +\infty$. Or, si $(F(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est la fonction de Wiener-Lévy du mouvement brownien, elle définit une probabilité cylindrique « de Gauss » sur $(L^2_{loc})^1$ (sa dérivée définit la probabilité cylindrique de Gauss sur L^2) ; la mesure de Gauss est p-typique pour tout p fini (et aussi p-cotypique). Donc on peut affirmer :

(P" 4) <u>La fonction aléatoire</u> $(F(t))_{t\in\mathbb{R}}$ <u>du mouvement brownien est presque sûrement dans</u> C^σ, <u>pour tout</u> $\sigma < \frac{1}{2}$, <u>et définit une probabilité de Radon de</u> tout ordre p fini sur C^σ [2].

(1) Voir L. SCHWARTZ, <u>Théorie des distributions</u>, Hermann, Paris, 1966, chap. VI, § 6.

(2) Naturellement ces résultats sont bien connus (voir, par exemple), P. LEVY, <u>Théorie de l'addition des variables aléatoires</u>, Gauthier-Villars, Paris, 1937, p. 168-172). M. Dacunha-Castelle m'a indiqué que des résultats analogues pouvaient, par cette méthode, être obtenus pour le mouvement brownien à plusieurs paramètres de temps.