Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Bernard Malgrange

Une remarque sur les idéaux de fonctions différentiables

Séminaire Jean Leray, nº 2 (1969-1970), p. 41-45
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969-1970___2_41_0>

UNE REMARQUE SUR LES IDÉAUX DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

par Bernard MALGRANGE (Grenoble)*

1. INTRODUCTION

Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{O}$) le faisceau des germes de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ (resp. analytiques) sur X, à valeurs complexes. Pour tout point $a \in X$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, désignons par F_a l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}[[x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n]]$ et par $f_a \longmapsto \hat{f}_a$ l'application $\mathcal{E}_a \to F_a$ (ou $\mathcal{O}_a \to F_a$) : "série de Taylor en a".

Soit $M \in \mathrm{Hom}(X; \mathcal{O}^q, \mathcal{O}^p)$ une matrice à coefficients analytiques sur X; le résultat suivant est connu (Malgrange [1]) :

<u>Soit</u> $f \in \mathcal{E}(X)^p$; <u>pour qu'il existe</u> $g \in \mathcal{E}(X)^q$ <u>vérifiant</u> $Mg = f$, <u>il faut et il suffit qu'en tout point</u> $a \in X$, <u>la condition suivante soit satisfaite</u> :

$C(a)$: <u>Il existe</u> $\gamma_a \in F_a^q$ <u>tel qu'on ait</u> : $\hat{f}_a = \hat{M}_a \gamma_a$.

Il est facile de voir sur des exemples que la conclusion reste vraie si l'on fait seulement l'hypothèse que $C(a)$ est vérifié en "suffisamment de points a". Par exemple, si $X = \mathbb{R}^2$, un $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ est de la forme $x_1 g$ si et seulement si l'on a $f(0, x_2) = 0$; par conséquent, il suffit ici d'imposer $C(a)$ pour un ensemble dense sur la droite $x_1 = 0$. D'une façon générale, posons la définition suivante :

DÉFINITION 1.1. <u>Un sous-ensemble</u> Y <u>de</u> X <u>sera dit</u> " M-<u>dense</u> " <u>si tout</u> $f \in \mathcal{E}(X)^p$, <u>vérifiant</u> $C(a)$ <u>en tout point</u> $a \in Y$, <u>est de la forme</u> Mg, <u>avec</u> $g \in \mathcal{E}(X)^q$. [Autrement dit, si la condition " $\forall\, a \in Y$, $C(a)$ " entraîne " $\forall\, a \in X$, $C(a)$ "].

Le but de cette note est de donner une caractérisation des ensembles M-denses; l'outil essentiel est un argument de "semi-continuité de la dimension", déjà utilisé dans des questions analogues par Tougeron [1] (voir l'Appendice de cet article). Cette question m'avait été posée par F. Pham, ce dont je le remercie avec plaisir.

2. CARACTÉRISATION DES ENSEMBLES M-DENSES

Désignons par L le conoyau du morphisme de faisceaux $M : \mathcal{O}^q \to \mathcal{O}^p$; en tensorisant par $\mathcal{E}$, on obtient une suite exacte :

$$\mathcal{E}^q \longrightarrow \mathcal{E}^p \longrightarrow L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

---

*) à paraître dans les "Inventiones".

et, par partition de l'unité, une suite exacte pour les sections :

$$\mathcal{E}^q(X) \to \mathcal{E}^p(X) \to \Gamma(X, L \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathcal{E}) \to 0 .$$

On déduit de là que la propriété " Y est M dense" ne dépend en fait que de L , et peut s'exprimer ainsi :

"Soit $\varphi \in \Gamma(X, L \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathcal{E})$; pour qu'on ait $\varphi = 0$, il faut et il suffit que, $\forall\, a \in Y$, l'image $\hat{\varphi}_a$ de φ_a dans $L_a \underset{\mathcal{O}_a}{\otimes} F_a = \hat{L}_a$ par l'application (identité $\underset{\mathcal{O}_a}{\otimes}$ série de Taylor en a) soit nulle".

Posons $V = \mathrm{supp}(L) = \{a \in X \mid L_a \neq 0\}$; en tout point $a \in X - V$, la dernière condition est trivialement vérifiée ; par conséquent, on peut supposer (quitte à remplacer Y par $Y \cap V$) que l'on a $Y \subset V$, ce que nous ferons désormais. Pour tout point $a \in V$, soient $\mathfrak{p}_{a,i}$ $(1 \leq i \leq \ell(a))$ les idéaux premiers de $\mathcal{O}_a$ associés à L_a (Bourbaki [1]), et soit $V_{a,i}$ le germe en a de sous-ensemble analytique-réel de X défini par $\mathfrak{p}_{a,i}$ (i.e. le germe des zéros de $\mathfrak{p}_{a,i}$). Désignons encore par V_a le germe de V en a ; la proposition suivante est bien connue :

PROPOSITION 2.1. On a $V_{a,i} \subset V_a$, et $V_a = \bigcup_i V_{a,i}$ $(1 \leq i \leq \ell(a))$.

Rappelons sa démonstration ; soit $0 = \bigcap L_{a,i}$ une décomposition primaire réduite de 0 dans L_a , avec $L_{a,i}$ primaire pour $\mathfrak{p}_{a,i}$; soit L_i un sous-faisceau analytique cohérent de L , défini au voisinage de a , tel qu'on ait $(L_i)_a = L_{a,i}$; on a encore $0 = \bigcap L_i$, donc l'application diagonale $L \to \oplus(L/L_i)$ est injective, d'où $V_a = \bigcup \mathrm{supp}(L/L_i)_a$. Tout revient donc à montrer qu'on a $(L/L_i)_a = V_{a,i}$, c'est-à-dire qu'on est ramené au cas où L_a est coprimaire pour un idéal $\mathfrak{p}_a$.

Dans ce cas, on sait qu'il existe une suite de composition

$$L_a = \bar{L}_{a,1} \supset \bar{L}_{a,2} \supset \dots \supset \bar{L}_{a,p+1} = 0$$

telle que $\bar{L}_{a,i}/\bar{L}_{a,i+1}$ soit monogène et isomorphe à $\mathcal{O}_a/\mathfrak{Q}_{a,i}$, $\mathfrak{Q}_{a,i}$ idéal premier de $\mathcal{O}_a$ contenant $\mathfrak{p}_a$; on peut aussi supposer $\mathfrak{Q}_{a,p} = \mathfrak{p}_a$, puisque L_a contient un sous-module monogène isomorphe à $\mathcal{O}_a/\mathfrak{p}_a$, soient $\bar{L}_i$ des sous-faisceaux cohérents de L , définis au voisinage de a , vérifiant $(\bar{L}_i)_a = \bar{L}_{a,i}$, on a encore, au voisinage de a , $\bar{L}_i/\bar{L}_{i+1} \simeq \mathcal{O}/\mathfrak{Q}_i$, $\mathfrak{Q}_i$ un faisceau cohérent d'idéaux vérifiant $(\mathfrak{Q}_i)_a = \mathfrak{Q}_{a,i}$; par suite, on a, avec $\mathfrak{p} = \mathfrak{Q}_p$:

$$\mathrm{supp}(L)_a = \bigcup_i \mathrm{supp}(L_i/L_{i+1})_a = \bigcup_i \mathrm{supp}(\mathcal{O}/\mathfrak{Q}_i)_a = \mathrm{supp}(\mathcal{O}/\mathfrak{p})_a$$

ce qui démontre la proposition.

<u>Remarque</u> 2.2. La décomposition précédente de V_a ne doit pas être confondue avec sa "décomposition en germes irréductibles" ; les deux décompositions n'ont presque aucun rapport pour les raisons suivantes :

D'une part, les $V_{a,i}$ ne sont pas forcément irréductibles ; ensuite il se peut que l'on ait $V_{a,i} \subset V_{a,j}$, pour $i \neq j$, soit que l'on ait $\mathfrak{P}_{a,i} \supset \mathfrak{P}_{a,j}$ ("composantes immergées" de la décomposition primaire), soit encore simplement parce que en analytique-réel, le "Nullstellensatz" est faux. Naturellement dans le cas analytique-complexe, de ces trois accidents, seul le second peut se produire.

THÉORÈME 2.3. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

a) Y <u>est</u> M-<u>dense</u> ;

b) <u>Pour tout point</u> $a \in V$ <u>et tout</u> $i \leq \ell(a)$, <u>on a</u> $V_{a,i} \cap Y_a \neq \emptyset$;

(autrement dit : soit $\tilde{V}_{a,i}$ un représentant de $V_{a,i}$ au voisinage de a ; alors $\tilde{V}_{a,i} \cap Y$ est adhérent à a).

Démontrons d'abord a) $\Rightarrow$ b) . Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un point $a \in V$ et un i tels qu'on ait $V_{a,i} \cap Y_a = \emptyset$; il existe φ , section de L au voisinage de a tel que le noyau de l'application

$$f \longmapsto f\varphi : \mathcal{O}_a \to L_a$$

soit égal à $\mathfrak{P}_{a,i}$; au voisinage de a , soit $\mathfrak{P}_i$ le faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}$ tel que $(\mathfrak{P}_i)_a = \mathfrak{P}_a$; l'application $f \mapsto f\varphi$ donne encore une suite exacte $0 \to \mathfrak{P}_i \to \mathcal{O} \to L$; l'application naturelle $L \to L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$ est injective (parce que, pour tout b , $\mathcal{E}_b$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_b$, cf. Malgrange [1] ; ou, plus simplement, parce que l'application composée

$$L_b \to L_b \underset{\mathcal{O}_b}{\otimes} \mathcal{E}_b \to L_b \underset{\mathcal{O}_b}{\otimes} F_b$$

est injective, F_b étant fidèlement plat sur $\mathcal{O}_b$, cf. Bourbaki [1]) ; on peut donc considérer φ comme une section au voisinage de a de $L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$, dont le germe en a est $\neq 0$; soit $\psi \in \mathcal{E}(X)$, égal à 1 au voisinage de a , et à support compact ; si le support de ψ est assez voisin de a , $\psi\varphi$ peut être considéré comme une section de $L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$ sur X entier ; si de plus $\mathrm{supp}(\psi) \cap \tilde{V}_{a,i} \cap Y = 0$, $\tilde{V}_{a,i}$ un représentant convenable de $V_{a,i}$ au voisinage de 0 , on aura $(\psi\varphi)_b = 0$ pour tout $b \in Y$; <u>a fortiori</u> $(\widehat{\psi\varphi})_b = 0$; mais $(\psi\varphi)_a \neq 0$, ce qui montre que Y n'est pas M-dense.

Démontrons maintenant b) $\Rightarrow$ a) . Le théorème étant local, il suffit de le démontrer au voisinage d'un point $a \in X$ fixé. Nous allons procéder pour cela en deux étapes :

Etape 1

Supposons qu'on ait $L = \mathcal{O}/\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}$ faisceau cohérent d'idéaux, avec $\mathcal{O}_a/\mathfrak{I}_a$ réduit, i.e. $\mathfrak{I}_a$ intersection d'idéaux premiers ; soit f une section de $\mathcal{E}$ au voisinage de a , vérifiant, pour tout point $b \in Y$ voisin de a :

$$\hat{f}_b \in \mathfrak{I}_b \underset{\mathcal{O}_b}{\otimes} F_b \qquad (= \hat{\mathfrak{I}}_b) .$$

Il suffit de montrer qu'on a $\hat{f}_a \in \hat{\mathfrak{I}}_a$: en effet, d'après un théorème classique de Cartan-Oka, en tout point $c \in V$, assez voisin de a , $\mathcal{O}_c/\mathfrak{I}_c$ est réduit, et par conséquent, le même raisonnement, appliqué à c au lieu de a , montrera qu'on a $\hat{f}_c \in \hat{\mathfrak{I}}_c$, ce qui est le résultat cherché.

On a $\mathfrak{I}_a = \cap\, \mathfrak{P}_{a,i}$ $(1 \leq i \leq \ell(a))$, donc, par platitude de F_a sur $\mathcal{O}_a$: $\hat{\mathfrak{I}}_a = \cap\, \hat{\mathfrak{P}}_{a,i}$; par hypothèse, on a, pour chaque i : $Y \cap V_{a,i} \neq 0$; ceci montre qu'il suffit de traiter le cas où $\mathfrak{I}_a$ est premier, et, plus précisément, de démontrer le lemme suivant :

LEMME 2.4. <u>Soient</u> $\mathfrak{I}$ <u>un faisceau cohérent d'idéaux, avec</u> $\mathfrak{I}_a$ <u>premier,</u> Y <u>un sous-ensemble de</u> $V = \operatorname{supp}(\mathcal{O}/\mathfrak{I})$, <u>avec</u> $Y_a \neq \emptyset$, <u>et</u> f <u>une section de</u> $\mathcal{E}$ <u>au voisinage de</u> a , <u>vérifiant</u> $\forall\, b \in Y$: $\hat{f}_b \in \hat{\mathfrak{I}}_b$; <u>alors, on a</u> $\hat{f}_a \in \hat{\mathfrak{I}}_a$.

Posons $k = \dim \mathcal{O}_a/\mathfrak{I}_a$; on sait que, en tout point $b \in V$ voisin de a , on a encore $k = \dim \mathcal{O}_b/\mathfrak{I}_b$, donc $k = \dim F_b/\hat{\mathfrak{I}}_b$. Pour tout point $b \in X$, voisin de a , soit $\mathcal{K}_b$ l'idéal de F_b engendré par $\hat{\mathfrak{I}}_b$ et $\hat{f}_b$; on sait (Tougeron [1]) que la fonction $b \longmapsto \dim F_b/\mathcal{K}_b$ est semi-continue supérieurement au voisinage de a (en un point où $\mathcal{K}_b = F_b$, on pose par exemple $\dim F_b/\mathcal{K}_b = -1$) ; par hypothèse, pour $b \in Y$, on a $\mathcal{K}_b = \hat{\mathfrak{I}}_b$, donc, puisque Y est adhérent à a, on aura $\dim F_a/\mathcal{K}_a \geq k$.

D'après un théorème de Nagata-Zariski, $\hat{\mathfrak{I}}_a$ est premier (voir par exemple une démonstration due à Serre, dans Malgrange [2]) ; d'autre part, on a $\dim F_a/\hat{\mathfrak{I}}_a = k$, et $\mathcal{K}_a \supset \hat{\mathfrak{I}}_a$; il en résulte qu'on a nécessairement $\mathcal{K}_a = \hat{\mathfrak{I}}_a$, d'où $f_a \in \hat{\mathfrak{I}}_a$, ce qui démontre le lemme et achève la première étape.

<u>Etape 2 : le cas général :</u>

Soit $a \in V$, et soit φ une section de $L \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathcal{E}$, au voisinage de a , vérifiant, pour tout $b \in Y$ voisin de a : $\hat{\varphi}_b = 0$. Pour établir le théorème il suffit de montrer qu'on a $\hat{\varphi}_a = 0$. En raisonnant comme dans l'étape précédente, il suffit de traiter le cas où L_a est coprimaire pour un certain idéal $\mathfrak{P}_a$. Reprenons alors les notations de la proposition 2.1., fin de la démonstration. Nous allons démontrer, par récurrence descendante sur i $(1 \leq i \leq p+1)$, le résultat suivant :

LEMME 2.5. Il existe g_i , analytique au voisinage de a , avec $g_{i,a} \notin \mathfrak{p}_a$, possédant la propriété suivante : si φ est une section de $\bar{L}_i \otimes \mathcal{E}$ au voisinage de a , vérifiant, $\forall\, b \in Y$: $\hat{\varphi}_b = 0$, on a $g_i \varphi = 0$.

Pour $i = p+1$, le résultat est trivial, puisque $\bar{L}_{p+1} = 0$. Supposons alors le résultat acquis pour $i+1$, et démontrons-le pour i ; soit ψ l'image de φ dans l'espace des sections de $(\bar{L}_i/\bar{L}_{i+1}) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E} \simeq \mathcal{E}/\mathfrak{Q}_i\mathcal{E}$; si $\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{p}$, par la première étape, on a $\psi = 0$, donc en fait φ est une section de $L_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$ (noter que, par platitude de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{O}$, l'application

$$\bar{L}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E} \to \bar{L}_i \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$$

est injective ; on peut donc considérer le premier comme un sous-faisceau du second) ; dans ce cas, le lemme est vrai avec $g_i = g_{i+1}$. Si au contraire $\mathfrak{Q}_{i,a} \neq \mathfrak{p}_a$, il existe h analytique au voisinage de a , avec $h_a \in \mathfrak{Q}_{i,a}$ et $h_a \notin \mathfrak{p}_a$; on aura $h\psi = 0$ au voisinage de a , donc $h\varphi$ est une section de $\bar{L}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$ et le lemme sera vrai avec $g_i = hg_{i+1}$.

Achevons maintenant la démonstration : soit φ une section de $L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$ au voisinage de a , vérifiant, $\forall\, b \in Y$, $\hat{\varphi}_b = 0$; on a $g_1\varphi = 0$, donc en particulier $\hat{g}_{1,a}\hat{\varphi}_a = 0$. Comme $g_{1,a} \notin \mathfrak{p}_a$, l'homothétie $g_{1,a} : L_a \to L_a$ est injective ; par suite (platitude de F_a sur $\mathcal{O}_a$) l'homothétie $\hat{g}_{1,a} : \hat{L}_a \to \hat{L}_a$ est aussi injective ; par suite on a $\hat{\varphi}_a = 0$, ce qui démontre le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

N. BOURBAKI [1] : "Algèbre commutative", chap. 3 et 4, Hermann, Paris (1962).

B. MALGRANGE [1] : "Ideals of differentiable functions", Oxford University Press, Bombay (1966).

B. MALGRANGE [2] : "Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques", Bull. Soc. Math. Fr. 91 (1963), p. 113-127.

J.C. TOUGERON [1] : "Idéaux de fonctions différentiables", Ann. Inst. Fourier, 18-1 (1968), p. 177-240.