Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Jacques-Louis Lions

Écoulement d'un fluide rigide visco-plastique incompressible

Séminaire Jean Leray, nº 2 (1969-1970), p. 8-14
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969-1970___2_8_0>

ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE RIGIDE VISCO-PLASTIQUE INCOMPRESSIBLE

par

Jacques-Louis LIONS

On expose ici le contenu d'une note aux C.R. Acad. des Sciences, Décembre 1969, par G. Duvaut et l'Auteur.

L'écoulement d'un fluide rigide visco-plastique incompressible (fluide de Bingham) est régi par un système d'inéquations variationnelles (contenant comme cas particulier les équations de Navier-Stokes).

On donne aux N° 1 à 5 les énoncés des résultats principaux obtenus.

Le N° 6 donne les idées essentielles de la démonstration du Théorème 1, qui est à la base de tous les autres résultats.

1. Formulation du problème.

Si u est le vecteur vitesse de l'écoulement dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ du fluide incompressible, on a :

$$\text{Div } u = 0 , \tag{1}$$

$$\rho_o\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \text{Div } \bar{\bar{\sigma}} + f , \tag{2}$$

(ρ_o sera pris égal à 1 dans la suite), où $\bar{\bar{\sigma}}$ = tenseur des contraintes de composantes σ_{ij} et où f est une densité volumique de forces donnée.

La loi de comportement du fluide rigide - visco-plastique de Bingham [8] est :

$$\begin{aligned} & D_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad \sigma_{II}^{\frac{1}{2}} < g , \\ & 2\mu\, D_{ij} = \left(1 - \frac{g}{\sigma_{II}^{\frac{1}{2}}}\right)\sigma_{ij}^D \quad \text{si} \quad \sigma_{II}^{\frac{1}{2}} \geqq g \end{aligned} \tag{3}$$

où

$$D_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad , \quad \sigma_{II} = \tfrac{1}{2}\, \sigma^D_{ij}\, \sigma^D_{ij} \tag{4}$$

(σ^D_{ij} étant les composantes du déviateur du tenseur des contraintes) ,

g = constante positive représentant un seuil de contraintes, au-deçà duquel le fluide se comporte comme un matériau rigide et au-delà duquel il flue de façon voisine d'un fluide de viscosité μ ; à (3) on ajoute

(5) $$u = 0 \text{ au bord } \Gamma \text{ de } \Omega .$$

On pose :

$$a(u,v) = 2\mu \int_\Omega D_{ij}(u)\, D_{ij}(v)\, dx,$$

$$j(v) = 2g \int_\Omega D_{II}(v)^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{où} \quad D_{II}(v) = \tfrac{1}{2} D_{ij}(v)\, D_{ij}(v) ,$$

$$b(u,v,w) = \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx ,$$

$$(f,g) = \int_\Omega f_i\, g_i\, dx .$$

On vérifie la

<u>Propriété</u> : l'écoulement d'un fluide de Bingham satisfait à

(6) $$\left(\frac{\partial u(t)}{\partial t}, v-u(t)\right) + a(u(t), v-u(t)) + b(u(t),u(t),v) + j(v) - j(u(t)) \geqq (f(t),v-u(t))$$

$\forall\, v$ tel que $\mathrm{Div}\, v = 0$, $v = 0$ sur Γ , à quoi on ajoute (1), (5) et la condition initiale

(7) $$u(o) = 0 .$$

On a un résultat analogue pour le <u>cas stationnaire</u>.

On prend alors (6) (et son analogue stationnaire) comme <u>définition du modèle</u> (avec (1), (5), (7)), qui est donc gouverné par une <u>inéquation variationnelle</u>.

2. <u>Existence d'une solution faible en dimension quelconque</u>.

On introduit :

$\mathcal{V} = \{\varphi \mid \varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^n,\ \mathrm{div}\, \varphi = 0\}$

V_σ = adhérence de $\mathcal{V}$ dans $(H^\sigma(\Omega))^n$, $\sigma > 0$ quelconque,

$V_1 = V$, $V_o = H$ (produit scalaire (,)) .

THÉORÈME 1. <u>On suppose que</u> $f \in L^2(0,T;H)$. <u>Il existe une fonction</u> u <u>telle que</u>

(8) $$u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) ,$$

(9) $$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;V'_\sigma), \sigma = n/2 ,$$

(10) $$u(o) = 0 ,$$

(11) $$\int_0^T \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u\right) + a(u,v-u) - b(u,v,u) + j(v) - j(u) - (f,v-u)\right] dt \geqq 0$$

$\forall$ v <u>telle que</u>

$$v \in L^2(0,T,V_\sigma), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;H),\ v(o) = 0\ (^1).$$

<u>L'unicité</u> est ouverte, sauf si $n = 2$; cf. N° 3.

3. <u>Existence et unicité d'une solution faible et d'une solution forte en dimension deux d'espace.</u>

THÉORÈME 2. <u>On suppose</u> $n = 2$. <u>Il existe alors une fonction</u> u <u>et une seule vérifiant</u> (8), (9) (<u>avec</u> $\sigma = 1$), (10) <u>et</u> (au lieu de (11))

$$\left(\frac{\partial u(t)}{\partial t}, v-u(t)\right) + a(u(t),v-u(t)) + b(u(t),u(t),v-u(t)) + j(v) - j(u(t)) \geq (f(t),v-u(t)) \quad , \qquad \forall \ v \in V . \tag{13}$$

Pour les solutions "fortes" on a le

THÉORÈME 3. <u>On suppose que</u> $n = 2$ <u>et que</u>

$$\frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(0,T;H)\ f(o) = 0 . \tag{14}$$

<u>Alors la solution</u> u <u>de</u> (13) <u>vérifie</u>

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) . \tag{15}$$

4. <u>Comportement lorsque</u> $g \to 0$.

Notons d'abord que les résultats précédents sont valables si $g = 0$ et redonnent alors certains des résultats connus sur les équations de Navier-Stokes ([4], [3],[6]).

La solution u de (13) dépend évidemment de g , posons $u = u_g$; alors :

THÉORÈME 4. <u>On suppose</u> $n = 2$. <u>Lorsque</u> $g \to 0$ <u>on a</u>

(16) $u_g \to u$ dans $L^2(0,T;V)$ faible,

(17) $\frac{\partial u_g}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t}$ dans $L^2(0,T;V')$ faible,

<u>où</u> u <u>est la solution des équations de Navier-Stokes</u>.

Si $n > 2$, on peut extraire une suite de g telle que u_g converge vers une solution de Navier-Stokes.

(^{1}) Il s'agit d'<u>une formulation faible</u> de (6).

5. Cas stationnaire

THÉORÈME 5. On suppose $n \leqq 4$. Pour tout $\lambda \geqq 0$, il existe $u \in V$ tel que

(18) $$a(u,v-u) + \lambda b(u,u,v-u) + j(v) - j(u) \geqq (f,v-u) \qquad \forall\ v \in V$$

(si $n > 4$, le résultat subsiste en prenant dans (18) $v \in V_s$, $s = \frac{n}{2} - 1$).

Si $\lambda = 0$, u est unique, soit $u = u_o$; le résultat est alors une variante de [7].

Dans le théorème 5 on peut trouver une famille de solutions u_λ telle que $u_\lambda \to u_o$ dans V faible lorsque $\lambda \to 0$.

Par ailleurs, pour λ fixé, on peut trouver une famille de solutions u_g de (18) telle que

(19) $u_g \to u_{NS}$ dans V faible lorsque $g \to 0$,

où

u_{NS} = solution du système stationnaire de Navier-Stokes.

6. Principe de la démonstration du Théorème 1

6.1. Idée générale

La formulation (11) est une forme "faible" de (13) ; on commence donc par essayer de résoudre (13). On note que si j était différentiable alors on pourrait remplacer (13) par une équation

(20) $$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t),v\right) + a(u(t),v) + b(u(t),u(t),v) + (j'(u(t)),v) = (f(t),v) \qquad \forall \quad v \in V_\sigma .$$

Alors l'idée est d'approcher j par j_ε :

(21) $$j_\varepsilon(v) = \frac{2g}{1+\varepsilon} \int_\Omega D_{II}(v)^{\frac{1+\varepsilon}{2}} dx \quad , \qquad \varepsilon > 0 .$$

On cherche alors à résoudre, au lieu de (20) :

(22) $$\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t},v\right) + a(u_\varepsilon,v) + b(u_\varepsilon,u_\varepsilon,v) + (\partial_\varepsilon'(u_\varepsilon),v) = (f,v) \qquad \forall\ v \in V_\sigma .$$

Mais (22) est une équation du type Navier Stokes avec en outre la non linéarité correspondant à $j_\varepsilon'(u_\varepsilon)$. Il faut alors, comme dans [5] (Chapitre 2, N° 5), utiliser à la fois des méthodes de compacité et de monotonie. Il est alors utile de régulariser encore une fois (22) (double régularisation) : on introduit $\eta > 0$ et on cherche $u_{\varepsilon\eta}$ solution de

$$(23)\quad \left(\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}}{\partial t}, v\right) + a(u_{\varepsilon\eta}, v) + b(u_{\varepsilon\eta}, u_{\varepsilon\eta}, v) + (j'_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}), v) + \eta(u_{\varepsilon\eta}, v)_{V_\sigma} = (f,v)$$

$$\forall\ v \in V_\sigma ,$$

avec

$$(24)\quad u_{\varepsilon\eta}(o) = 0 .$$

6.2. Résolution de (23), (24)

Par les méthodes [5], Chap. 2, N°5, on montre l'existence de $u_{\varepsilon\eta}$ solution de (23) (24) avec

(25) $u_{\varepsilon\eta} \in$ borné de $L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ (lorsque $\varepsilon,\eta \to 0$) ,

(26) $u'_{\varepsilon\eta} \in$ borné de $L^2(0,T;V'_\sigma)$, $(\varphi' = \frac{\partial\varphi}{\partial t})$,

(27) $\sqrt{\eta}\, u_{\varepsilon\eta} \in$ borné de $L^2(0,T;V_\sigma)$.

6.3. Passage à la limite en ε et η

D'après (25) (26) on peut supposer, par extraction d'une sous-suite encore notée $u_{\varepsilon\eta}$, que

$u_{\varepsilon\eta} \to u$ dans $L^2(0,T;V)$ faible et dans $L^\infty(0,T;H)$ faible étoile,

$u'_{\varepsilon\eta} \to u'$ dans $L^2(0,T;V'_\sigma)$ faible,

et il faut montrer que u satisfait à (11).

Pour cela on introduit, pour v donné avec (12) :

$$(28)\quad \begin{aligned} Y_{\varepsilon\eta} = \int_0^T [(v', v-u_{\varepsilon\eta}) + a(u_{\varepsilon\eta}, v-u_{\varepsilon\eta}) + b(u_{\varepsilon\eta}, u_{\varepsilon\eta}, v-u_{\varepsilon\eta}) \\ + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}) + \eta(u_{\varepsilon\eta}, v-u_{\varepsilon\eta})_{V_\sigma} - (f, v-u_{\varepsilon\eta})]dt. \end{aligned}$$

Utilisant (23) (où l'on remplace v par $v-u_{\varepsilon\eta}$) on trouve que

$$Y_{\varepsilon\eta} = \int_0^T [(v'-u'_{\varepsilon\eta}, v-u_{\varepsilon\eta}) + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}) - (j'_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}), v-u_{\varepsilon\eta})]dt .$$

D'après la convexité de la fonction $v \to j_\varepsilon(v)$, on a :

$$j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}) - (j'_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}), v-u_{\varepsilon\eta}) \geq 0$$

et donc

$$(29)\quad Y_{\varepsilon\eta} \geq \tfrac{1}{2}|v(T) - u_{\varepsilon\eta}(T)|^2 ,$$

ou encore

$$(30)\quad \int_0^T [v',v-u_{\varepsilon\eta}) + a(u_{\varepsilon\eta},v) - b(u_{\varepsilon\eta},v,u_{\varepsilon\eta}) + \eta(u_{\varepsilon\eta},v)_{V_\sigma} + j_\varepsilon(v) - (f,v-u_{\varepsilon\eta})]dt$$
$$\geqq \int_0^T [a(u_{\varepsilon\eta},u_{\varepsilon\eta}) + j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}) + \eta(u_{\varepsilon\eta},u_{\varepsilon\eta})_{V_\sigma}]dt$$
$$+ \tfrac{1}{2}|v(T) - u_{\varepsilon\eta}(T)|^2 \geqq \int_0^T [a(u_{\varepsilon\eta},u_{\varepsilon\eta}) + j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta})]dt \ .$$

Mais

$$\int_0^T j(u)dt \leqq \left(\int_0^T \int_\Omega g\, D(u)^{\frac{1+\varepsilon}{2}} dx\, dt\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \left(\int_0^T \int_\Omega g\, dx\, dt\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

d'où

$$\int_0^T j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta})dt \geqq c_\varepsilon \left(\int_0^T j(u_{\varepsilon\eta})dt\right)^{1+\varepsilon} \ , \quad c_\varepsilon \to 1 \quad \text{si} \quad \varepsilon \to 0 \ .$$

Alors

$$\liminf \int_0^T j_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta})dt \geqq \int_0^T j(u)dt$$

et (30) donne

$$\int_0^T [(v',v-u) + a(u,v) - b(u,v,u) + j(v) - (f,v-u)]dt \geqq \int_0^T [a(u,u) + j(u)]dt$$

d'où (11).

7. Remarques

7.1. Les autres démonstrations utilisent le même genre de techniques. Dans l'unicité (pour le Théorème 2) la démarche est analogue à celle suivie dans le cas des équations [6] : si u_* est une deuxième solution éventuelle de (13), on prend $v = u_*$ dans (13) et $v = u$ dans l'inéquation analogue pour u_* . Par addition on obtient, si $w = u-u_*$:

$$-\left(\frac{\partial w}{\partial t}(t),w(t)\right) - a(w(t),w(t)) + b(u(t),u(t),u_*(t) - u(t))$$
$$+ b(u_*(t),u_*(t),u(t) - u_*(t)) \geqq 0$$

et c'est exactement l'inégalité dont on a besoin pour arriver à l'unicité dans le cas des équations ; cf. [6].

7.2. D'autres problèmes d'inéquations variationnelles intervenant dans divers points de la Mécanique sont donnés dans [1], [2].

7.3. L'analyse numérique de ces problèmes est en cours par ailleurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. DUVAUT et J.L. LIONS, C.R. Acad. Sc., t. 269 (1969), p. 510-513 et p. 570-572.

[2] G. DUVAUT et J.L. LIONS, C.R. Acad. Sc., Nouvelles inéquations variationnelles rencontrées en thermique et en thermo-élasticité. A paraître.

[3] O.A. LADYZENSKAYA, The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon et Breach, New-York, 1963.

[4] J. LERAY, Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois. J. Math. Pures et Appliquées, Série 9, 13, (1934), 331-418.

[5] J.L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires, Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[6] J.L. LIONS et G. PRODI, Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2. C.R. Acad. Sc. (1959, 248, 3519-3521

[7] P.P. MOSOLOV et V.P. MIASNIKOV, Variational methods in the theory of the fluidity of a viscous plastic medium. P.M.M. 29 (1965), 468-492.

[8] W. PRAGER, Introduction to mechanics of continua. Gim and Company, 1961.