Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Frédéric Pham

Tresses des fonctions algébriques d'après V. Arnold

Séminaire Jean Leray, n° 3 (1969), p. 11-14
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969___3_11_0>

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

TRESSES DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES D'APRÈS V. ARNOLD

par Frédéric PHAM

(exposé fait le 5 mars 1969)

On se propose d'illustrer une courte note d'Arnold parue aux ≪Ouspekhi≫ [1], qui annonce un article à paraître dans les ≪Travaux de la Société mathématique de Moscou≫ (tome 21, 1969).

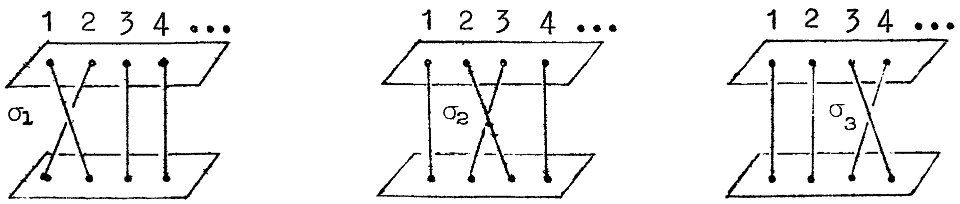
Soit G_n l'espace des polynomes unitaires de degré n d'une variable complexe, ayant toutes leurs racines distinctes :

(1) $$G_n = \{a \in \mathbb{C}^n \mid \Delta(a) \neq 0\}$$

où $\Delta(a)$ désigne le discriminant du polynome unitaire générique de degré n

(2) $$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \, .$$

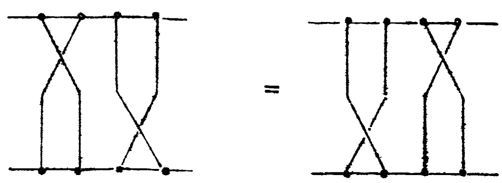
En identifiant chaque polynome à l'ensemble de ses racines (n points distincts dans le plan complexe), on voit que le groupe fondamental $\pi_1(G_n)$ n'est autre que le ≪braid group≫ $B(n)$ d'ARTIN [2] (groupe des ≪tresses à n brins≫). Artin en a donné une <u>présentation par</u> $n-1$ <u>générateurs</u> $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ (symbolisés par la figure



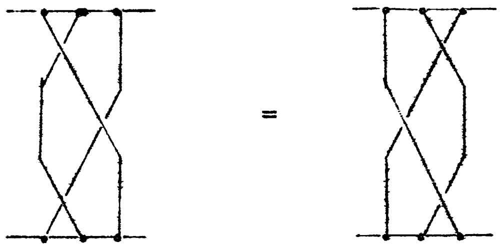
etc...)

<u>liés par les relations</u> (3) <u>et</u> (4) <u>suivantes</u> :

(3) $$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \qquad \text{pour} \qquad |i-j| > 1$$



(4) $$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$$



Définition de la tresse d'une fonction algébrique.

Se donner une fonction algébrique z sur $\mathbb{C}^p$, c'est remplacer dans l'expression (2) les indéterminées a_i par des polynomes $a_i \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_p]$. Si

$$\Delta = \{x \in \mathbb{C}^p \mid \Delta(a(x)) = 0\}$$

désigne l'ensemble des points critiques de la fonction z , on a une application continue

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^p - \Delta &\longrightarrow G_n \\ x &\mapsto a(x) \end{aligned}$$

qui induit sur les groupes fondamentaux un homomorphisme

$$\pi_1(\mathbb{C}^p - \Delta) \to B(n)$$

appelé par Arnold «tresse de la fonction algébrique».

La «tresse» constitue un invariant algébrique plus fin que la «monodromie» (homomorphisme de $\pi_1(\mathbb{C}^p - \Delta)$ dans le groupe des permutations des n racines) : en effet la tresse décrit non seulement les permutations des n déterminations de z mais aussi la façon dont ces n déterminations tournent les unes autour des autres dans le plan complexe.

EXEMPLES

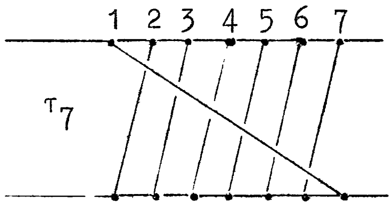
Nous allons considérer des exemples où $p = 1$ (fonctions algébriques d'une variable) et où le seul point critique est l'origine. La tresse est alors un homomorphisme de $\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}) = \mathbb{Z}$ dans $B(n)$, bien déterminé par la donnée de l'image dans $B(n)$ de l'élément $1 \in \mathbb{Z}$: cette image sera encore appelée, par abus de langage, tresse de la fonction algébrique.

Exemple 0 . $\boxed{z = x^{m/n}}$

La tresse de cette fonction est l'élément

$$(\tau_n)^m \in B(n)$$

où $\tau_n = \sigma_{n-1}\,\sigma_{n-2} \cdots \sigma_1$ est la tresse d'Artin symbolisée par la figure



(cette tresse représente le mouvement des n racines n-ièmes de l'unité effectuant toutes ensemble 1 n-ième de tour le long du cercle unité).

Exemple 1.

On sait que toute fonction algébrique d'une variable est donnée localement par un «développement de Puiseux»* en puissances fractionnaires croissantes de x :

$$z = \sum_{i=0}^{i_o} a_{o,i}\, x^{m_o+i} + \sum_{i=0}^{i_1} a_{1,i}\, x^{(m_1+i)/n_1} + \sum_{i=0}^{i_2} a_{2,i}\, x^{(m_2+i)/n_1 n_2} + \cdots$$

$$\cdots + \sum_{i=0}^{\infty} a_{g,i}\, x^{(m_g+i)/n_1 n_2 \cdots n_g} ,$$

où (m_k, n_k) sont des couples d'entiers premiers entre eux $(k = 1,2,\dots,g)$, appelés paires caractéristiques de Puiseux, et où

$$(m_{k-1}+i_{k-1})/n_1 n_2 \cdots n_{k-1} < m_k/n_1 n_2 \cdots n_k \;;$$

de plus, $n_1 n_2 \cdots n_g = n$, ordre de la fonction algébrique à l'origine.

Il n'est pas difficile de se convaincre que la tresse (locale) d'une telle fonction peut se construire comme une «tresse de tresses ... de tresses» (g fois) de la façon suivante :

1ère tresse : pour $|x|$ assez petit, les n déterminations de z se groupent naturellement en $n_1 n_2 \cdots n_{g-1}$ paquets de n_g éléments chacun ; à l'intérieur de chaque paquet, on «tresse» les n_g éléments en leur faisant effectuer $m_g/n_1 n_2 \cdots n_g$ tours autour de leur position moyenne ; une fois ceci fait, on considèrera chaque paquet comme un objet solide qu'on pourra déplacer par translation dans le plan mais qu'on n'aura pas le droit de déformer ni de faire pivoter ; on opèrera sur ces objets les translations suivantes :

2e tresse : les $n_1 n_2 \cdots n_{g-1}$ objets ci-dessus se groupent naturellement en $n_1 n_2 \cdots n_{g-2}$ paquets de n_{g-1} objets chacun ; à l'intérieur de chaque paquet,

*) Le développement de Puiseux est unique si le polynome considéré est irréductible dans $\mathbb{C}[[x,z]]$, ce que nous supposerons ici.

on «tresse» les n_{g-1} objets en leur faisant effectuer $m_{g-1}/n_1 n_2 \dots n_{g-1}$ tours autour de leur position moyenne ;
ceci fait on considère chaque paquet comme un nouvel objet solide, et l'on recommence, jusqu'à la ...

... g-ième tresse.

En utilisant le théorème 14 de [2], on peut démontrer que la description donnée ci-dessus de la «tresse ... de tresses» définit sans ambigüité un élément de $B(n)$, et que les éléments de $B(n)$ obtenus par ce type de construction sont en correspondance bijective avec les suites de paires $(m_1, n_1), (m_2, n_2), \dots (m_g, n_g)$: autrement dit, la donnée de la tresse d'un développement de Puiseux équivaut à la donnée de la suite des paires caractéristiques de Puiseux.

Remarque. En «refermant» la tresse du développement de Puiseux, c'est-à-dire en identifiant l'origine de chaque brin à l'extrémité qui porte le même numéro, on obtient un noeud, qui n'est autre que le «noeud torique itéré» bien connu de la courbe algébrique* (intersection de la courbe algébrique avec une petite sphère $S^3 \subset \mathbb{C}^2$).

Cohomologie du groupe des tresses d'Artin.

On peut voir que $\pi_i(G_n) = 0$ pour $i > 1$, de sorte que G_n est l'espace classifiant $K(B(n),1)$ du groupe $B(n)$. Arnold en déduit que la cohomologie du groupe $B(n)$ est égale à la cohomologie de G_n :

$$H^i(B(n),Z) = H^i(G_n,Z)$$

et calcule cette dernière par des raisonnements géométriques, utilisant une stratification de l'ensemble $\{\Delta(a) = 0\}$ (ensemble qu'il appelle «queue d'aronde multidimensionnelle», par analogie avec la «queue d'aronde» des géomètres italiens, qui correspond au cas particulier $n = 4$).

Le résultat du calcul est indiqué dans un tableau de [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. ARNOLD. Sur les tresses des fonctions algébriques et les cohomologies des queues d'ar ndes. Ouspekhi mat. naouk, t. XXIII, 4, 142 (1968), (en russe).

[2] E. ARTIN. Theory of Braids. The collected papers of Emil Artin, pp. 446-471 (Addison-Wesley, 1965).

*) pourvu que l'axe des z ait été choisi transverse à la courbe.