Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Yvonne Choquet-Bruhat

Ondes asymptotiques et approchées pour un système d'équations aux dérivées partielles quasi-linéaire

Séminaire Jean Leray, nº 3 (1969), p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969___3_1_0>

ONDES ASYMPTOTIQUES ET APPROCHÉES POUR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUASI-LINÉAIRE

par Yvonne CHOQUET-BRUHAT

Introduction

Nous nous proposons de construire des ondes asymptotiques et des ondes approchées, pour un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires sur une variété différentiable X en utilisant la méthode générale donnée par J. Leray [1] et Gårding-Kotaké-Leray [2] pour les systèmes linéaires à caractéristiques simples. Nous effectuons cette construction au voisinage d'une solution donnée du système et nous obtenons les termes successifs du développement par des quadratures sur des "rayons", bicaractéristiques correspondant à la solution donnée, comme dans le cas linéaire. Nous voyons cependant apparaître ici un phénomène nouveau pour les ondes authentiquement non linéaires (ondes non exceptionnelles au sens de Lax) qui est une déformation des signaux ("raidissement" conduisant aux phénomènes de choc). Les ondes asymptotiques obtenues ne sont, d'autre part, en général, dans le cas non linéaire, des ondes approchées qu'en se limitant aux deux premiers termes du développement.

Dans une deuxième partie nous considérons le cas des équations à caractéristiques multiples. Nous utilisons la classification algébrique donnée par J. Vaillant [7] de ces équations. Nous montrons que dans le cas I (caractéristique multiple d'ordre r avec espace propre caractéristique de dimension r) on obtient encore des ondes asymptotiques par quadrature le long des rayons si les variétés caractéristiques sont exceptionnelles (donc toujours, dans le cas linéaire). Nous étudions ensuite le cas II (caractéristique double avec un espace propre caractéristique de dimension 1) ; nous montrons qu'il existe des ondes asymptotiques non nulles si et seulement si on est dans le cas II_b , c'est-à-dire si la caractéristique envisagée annule aussi le polynôme sous caractéristique(1). La propagation de l'aide asymptotique est alors déterminée (si de plus la variété caractéristique est exceptionnelle) par une équation différentielle du second ordre(2) le long des rayons. Ce dernier résultat permet de montrer que, pour un système du type étudié, le problème de Cauchy est mal posé dans la norme C^1 .

1. DÉFINITIONS.

$L(u)$ désignera un système aux dérivées partielles quasi-linéaires, que nous prendrons, pour simplifier, du premier ordre ; l'inconnue u est un ensemble de N

---

(1) le polynôme sous caractéristique est un invariant qui a son origine dans les définitions de J. Leray ([2], § 3).

(2) analogue à celle trouvée par J. Vaillant, dans le cas linéaire, pour la propagation des discontinuités.

fonctions scalaires[1] sur la variété différentiable X , à valeurs complexes ; dans une carte locale (x^λ) de X le système s'écrit :

$$L(u) \equiv a^\lambda(x,u)\frac{\partial u}{\partial x^\lambda} + b(x,u) = 0 , \quad \lambda = 0,\dots,\ell-1 , \tag{1.1}$$

u et $\frac{\partial u}{\partial x^\lambda}$ sont des fonctions sur $\mathbb{R}^\ell$, à valeurs dans $\mathbb{C}^N$, $a^\lambda(x,u)$ est une matrice d'ordre N^2, et b^λ un vecteur de C^N fonctions $\mathbb{C}^\infty$ de (x^λ), fonctions entières de u dans un polycylindre P

$$|u^i - u^i_o| \leq R_i , \qquad \{u^i\} = u , \quad i = 1,\dots,N ;$$

on posera

$$a^\lambda(x,u_o) = a^\lambda_o , \qquad b(x,u_o) = b_o$$

et on désignera par

$$Da^\lambda_o , \quad Db_o$$

les gradients en u de a^λ et b pour $u = u_o$, de sorte que (un point désigne le produit intérieur dans $\mathbb{C}^N$) la formule de Taylor s'écrit :

$$\begin{aligned} a^\lambda(x,u) &\equiv a^\lambda_o + Da^\lambda.(u-u_o) + \dots , \\ b^\lambda(x,u) &\equiv b^\lambda_o + Db^\lambda.(u-u_o) + \dots . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Nous désignerons par u_q des fonctions sur $X \times \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^N$, par ω un paramètre réel (nommé fréquence), par φ une fonction réelle sur X (nommée phase), soit

$$u_q \overset{\text{def}}{=} u_q(x,\xi) , \quad x\in X , \quad \xi\in\mathbb{R} ,$$

$$u_q \circ \omega\cdot\varphi \overset{\text{def}}{=} u_q(x,\omega\,\varphi) .$$

Nous dirons avec J. Leray que la série formelle

$$u = \sum_{q=0}^{\infty} \omega^{-q} u_q \circ \omega\,\varphi \tag{1.3}$$

est une <u>onde asymptotique</u> pour le système aux dérivées partielles si en reportant formellement (1.3) dans (1.1) on trouve, compte tenu de (1.2) un développement en série de puissances de ω qui s'écrit formellement

(1) Les inconnues u pourraient aussi être p champs de tenseurs sur X , d'ordres $N_1,\dots,N_p$ avec $N_1 + \dots + N_p = N$.

(1.4) $$\sum_{q=0}^{\infty} \omega^{-q} F_q \circ \omega\varphi = 0$$

dont chaque coefficient F_q est nul quels que soient x et ξ.

Le développement fini

(1.5) $$u = \sum_{p=0}^{r} \omega^{-p} u_p \circ \omega\varphi$$

sera dit <u>onde approchée</u> d'ordre $q-1$ s'il existe une constante M telle que

$$\|L(u)\|_X \leqq M\,\omega^{-(q+1)} \qquad \text{pour tout } \omega$$

où $\|L(u)\|_X$ désigne une norme convenable, par exemple :

$$\|L(u)\|_X = \sup_{x\in X} |L(u)|_{C^N} .$$

Le développement (1.5), avec $r = q$, sera onde approchée d'ordre $q-1$ si le développement (1.4) correspondant est tel que $F_p = 0$, $p < q$ et si les u_p sont bornés, contenus dans le polycylindre P, et ont leurs dérivées partielles premières par rapport à x et ξ bornées.

2. <u>DÉTERMINATION DE LA PHASE</u> φ.

On pose

$$\dot{u}_q = \frac{\partial u_q(x,\xi)}{\partial \xi}, \quad \partial_\lambda u_q = \frac{\partial u_q(x,\xi)}{\partial x^\lambda}$$

et on prend pour u_o une fonction sur X (à valeurs dans C^N), indépendante de ξ, vérifiant le système donné :

(2.1) $$L(u_o) = 0 .$$

Le premier terme que l'on doit annuler est alors :

(2.2) $$F_o \equiv a_o^\lambda \partial_\lambda \varphi\, \dot{u}_1 = 0$$

d'où

THÉORÈME. <u>Une condition nécessaire pour qu'il existe une onde asymptotique avec</u> $\dot{u}_1 \neq 0$ <u>est que la phase</u> φ <u>annule l'équation aux dérivées partielles du premier ordre</u>

$$\{A(x,u,p)\}_{\substack{p_\lambda = \partial_\lambda\varphi \\ u = u_o}} = 0 ,$$

$A(x,u,p)$ désigne le polynôme caractéristique du système (1.1)

$$A(x,u,p) \overset{\text{def}}{=} \det(a^\lambda(x,u)p_\lambda) \tag{2.3}$$

3. CAS OÙ φ CORRESPOND A UNE CARACTÉRISTIQUE SIMPLE.

Posons

$$A^\lambda(x,u,p) = \frac{\partial A(x,u,p)}{\partial p_\lambda} \tag{3.1}$$

et supposons que

$$A_o^\lambda \overset{\text{def}}{=} \{A^\lambda(x,u,p)\}_{\substack{p_\lambda = \partial_\lambda\varphi \\ u = u_o}} \neq 0 \tag{3.2}$$

c'est-à-dire que $\operatorname{grad}\varphi = \{\partial_\lambda\varphi\}$ est racine simple du polynôme $A(x,u_o,p)$; la matrice $a^\lambda(x,u_o)\partial_\lambda\varphi$ est alors de rang $N-1$, et a, pour la valeur propre zéro, des espaces propres à droite et à gauche de dimension 1 ; soient h et $\bar{h}$ des bases de ces espaces, on déduit de (2.2) :

$$u_1 = U_1(x,\xi)h + V_1(x) \tag{3.3}$$

où U_1 et V_1 sont des fonctions arbitraires, à valeurs scalaires, respectivement sur $X \times R$ et sur X.

La détermination de U_1 va s'effectuer en cherchant à annuler le coefficient F_1 de (1.4):

$$F_1 \equiv a_o^\lambda\partial_\lambda\varphi\dot{u}_2 + a_o^\lambda\partial_\lambda u_1 + (Da^\lambda\partial_\lambda\varphi.u_1)\dot{u}_1 + (Da^\lambda\partial_\lambda u_o + Db).u_1 = 0\ . \tag{3.4}$$

En faisant opérer la matrice F_1 à gauche sur $\bar{h}$ on obtient, compte tenu de (3.3), une équation aux dérivées partielles du premier ordre pour U_1 qui s'écrit :

$$A_o^\lambda\partial_\lambda U_1 + \alpha U_1\dot{U}_1 + \rho U_1 + \gamma_1\dot{U}_1 + \delta_1 = 0\ , \tag{3.5}$$

compte tenu du fait que les vecteurs h et $\bar{h}$ peuvent être choisis (cf. Gårding-Kotake-Leray [2], § 3) de manière à ce que

$$\bar{h}a_o^\lambda h = A_o^\lambda \tag{3.6}$$

(A_o^λ est le vecteur bicaractéristique pour la phase φ, c'est-à-dire que $A_o^\lambda\partial_\lambda$ est la dérivation le long du rayon de la surface d'onde $\varphi = C^{te}$.) α et β sont des fonctions sur X, ne dépendant que des équations, de u_o et de φ :

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} (\bar{h}Da^\lambda\partial_\lambda\varphi.h)h\ , \quad (\text{dans le cas linéaire } \alpha = 0)\ , \tag{3.7}$$

(3.8) $$\beta \overset{\text{def}}{=} \bar{h}\{a^\lambda \partial_\lambda h + (Da^\lambda \partial_\lambda u + b), h\} ,$$

γ_1 et δ_1 sont des fonctions sur X qui dépendent de plus du choix de V_1 et sont nulles si $V_1 = 0$, ce que nous supposerons désormais pour simplifier l'écriture.

Les rayons $(t \to x(t,y))$ passant par les points y d'une sous-variété initiale S (d'équation $s(y) = 0$) étant déterminés par intégration du système différentiel

(3.9) $$\frac{dx^\lambda}{db} = A^\lambda_o \quad , \quad x(0,y) = y \quad , \quad s(y) = 0 ,$$

la solution U_1 de (3.5), passant par la variété initiale

(3.10) $$s(y) = 0 \quad , \quad \{U_1(x,\xi)\}_{\substack{x = y \\ \xi = \eta}} = W_1(y,\eta) ,$$

(s et W_1 fonctions données), est déterminé par des quadratures sur les rayons :

(3.11) $$U_1(t,y,\eta) = W_1(y,\eta)\Phi(t,y) \qquad \text{où} \qquad \Phi = \exp(-\int_0^t \beta d\tau)$$

avec

(3.12) $$\xi = \eta + W_1(y,\eta)\Psi(t,y) , \qquad \text{où} \qquad \Psi = \int_0^t \alpha \, \Phi \, d\tau .$$

On tire de (3.12)

$$\eta = \eta(t,y,\xi)$$

si

$$\frac{\partial\xi}{\partial\eta} \neq 0$$

ce qui est toujours réalisé pour t assez petit puisque

$$\frac{\partial\xi}{\partial\eta} = 1 \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

mais (3.12) pourra ne pas être inversible en dehors d'un voisinage de S, en particulier si α est de signe constant et si $\frac{\partial W_1}{\partial\eta}$ prend des valeurs de signe opposé à α il existera toujours des valeurs de t pour lesquelles $\frac{\partial\xi}{\partial\eta}$ s'annulant, (3.12) ne sera pas inversible.

Dans un voisinage de S, par ailleurs, la transformation $(t,y) \to x(t,y)$ peut toujours être inversée(1) (puisqu'elle est l'identité pour $t = 0$). On tire donc

(1) Elle peut l'être sur X si l'on a pris pour S une "surface de Cauchy" relative aux rayons, c'est-à-dire une sous-variété telle que chaque rayon (trajectoire du champ de vecteurs A^λ qui a été supposé régulier) la coupe en un point et un seul.

de (3.11) :

$$U_1(x,\xi) = W_1(y(x),\eta(t(x),y(x),\xi))\Phi(t(x),y(x)) .$$

A la propagation (avec un facteur Φ dû à la dilatation des rayons) s'ajoute donc dans le cas non linéaire un phénomène de déformation des signaux ($\eta \neq \xi$ pour $t \neq 0$). Si α est de signe constant (on dit alors que l'on a raidissement des signaux), la solution cesse toujours d'être déterminée pour des valeurs finies de t, si $\frac{\partial W_1}{\partial \eta}$ prend des valeurs de signe opposé à α (ce qui sera toujours le cas si W_1 est périodique en η).

Remarque.

On montre que

$$\alpha = \{DA(x,u,p)\}_{\substack{u = u_0 \\ p_\lambda = \partial_\lambda \varphi}} .h .$$

Les variétés caractéristiques telles que $\alpha = 0$ sont dites exceptionnelles (Lax [4], Boillat [9]). Le long de telles variétés les signaux se propagent sans déformation.

Les termes successifs u_q du développement (1.3) se déterminent de manière analogue, et sont donnés par des quadratures : on peut toujours ainsi trouver une onde asymptotique pour (1.1). Cependant on ne pourra en général pas obtenir d'onde approchée réelle d'ordre supérieur à 1, la dérivée $\dot{u}_q$ étant un polynôme de degré > 1 si $q > 2$ des termes précédemment calculés, u_q ne sera pas en général une fonction bornée pour tout ξ .

4. CAS D'UNE RACINE MULTIPLE D'ORDRE r AVEC UNE ESPACE PROPRE CARACTÉRISTIQUE DE DIMENSION r .

Supposons que $A(x,u,p)$ soit de la forme

$$A(x,u,p) = \{\bar{A}(x,u,p)\}^r \tilde{A}(x,u,p) \tag{4.1}$$

où le polynôme en p , irréductible, $\bar{A}$, ne divise pas $\tilde{A}$. Soit φ tel que

$$\{\bar{A}(x,u,p)\}_{\substack{u = u_0 \\ p_\lambda = \partial_\lambda \varphi}} = 0 , \tag{4.2}$$

nous supposons que la matrice $a_0^\lambda \partial_\lambda \varphi$ correspondante est de rang $N-r$. Soit h_q , et $\bar{h}_q$, $q = 1,\dots,r$, des bases de ses espaces propres à droite et à gauche respectivement (1). Des raisonnements analogues à ceux du paragraphe 3 montrent qu'il existe

(1) On montre (cf. [8]) que le système L est alors hyperbolique au sens de J. Leray si le polynôme $\bar{A}\tilde{A}$ l'est.

une onde asymptotique de premier terme perturbateur

(4.3) $$u_1 = \sum_{q=1}^{r} U_1^q \, h_q$$

où les U_1^q vérifient des équations différentielles du premier ordre de propagation le long des rayons $\bar{A}_o^\lambda$,

$$\bar{A}_o^\lambda = \left\{\frac{\partial \bar{A}(x,u,p)}{\partial p_\lambda}\right\}_{\substack{u = u_o \\ p_\lambda = \partial_\lambda \varphi}} ,$$

si ces ondes sont exceptionnelles, c'est-à-dire si

(4.4) $$\{D\bar{A}(x,u,p)\}_{\substack{u = u_o \\ p_\lambda = \partial_\lambda \varphi}} . h_q = 0 , \quad q = 1,\dots, r .$$

Remarque.

Les conditions (4.4) sont vérifiées par les systèmes hyperboliques de la mécanique des fluides pour les ondes qui y apparaissent comme multiples (ondes matérielles).

5. CAS D'UNE RACINE MULTIPLE D'ORDRE 2 AVEC UN ESPACE PROPRE CARACTÉRISTIQUE DE DIMENSION r .

Supposons $A(x,u,p)$ de la forme

(5.1) $$A(x,u,p) = \{\bar{A}(x,u,p)\}^2 \, \tilde{A}(x,u,p)$$

$\bar{A}$ polynôme irréductible ne divisant pas $\tilde{A}$.

Soit φ tel que

(5.2) $$\{\bar{A}(x,u,p)\}_{\substack{u = u_o \\ p_\lambda = \partial_\lambda \varphi}} = 0 ,$$

nous supposons que la matrice $a_o^\lambda \partial_\lambda \varphi$ est de rang N-1. Soient h et $\bar{h}$ des vecteurs propres (valeur propre zéro) à droite et à gauche. On trouve, comme au § 3(1):

(5.3) $$u_1 = U_1(x,\xi) h(x)$$

et l'équation différentielle (3.5). Mais ici, vu la forme (4.1) de A :

---

(1) pour simplifier on n'a pas écrit le terme $V_1(x)$: sa prise en considération conduit, avec d'autres arguments, aux mêmes conclusions.

(5.4) $$A_o^\lambda \overset{\text{def}}{=} \left\{\frac{\partial A^\lambda(x,u,p)}{\partial p_\lambda}\right\}_{\substack{u = u_o \\ p_\lambda = \partial_\lambda \varphi}} = 0 \ ,$$

(5.5) $$\alpha \overset{\text{def}}{=} \{DA(x,u,p)\}_{\substack{u = u_o \\ p_\lambda = \partial_\lambda \varphi}} = 0 \ ,$$

l'équation (3.5) entraîne donc $U_1 = 0$ sauf si

(5.6) $$\beta = 0 \ .$$

On montre, en utilisant des techniques algébriques inspirées de celles de J. Vaillant [7] que

(5.7) $$\beta = \{j_o(x,p)\}_{p_\lambda = \partial_\lambda \varphi}$$

où $j_o(x,p)$ est le polynôme sous-caractéristique correspondant à la solution u_o, généralisant celui introduit pour les systèmes linéaires par J. Leray et J. Vaillant. D'où, ici, le

THÉORÈME. <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe</u> U_1 <u>non nul vérifiant</u> (3.5) <u>est que</u> $p_\lambda = \partial_\lambda \varphi$ <u>soit racine du polynôme sous-caractéristique</u>.

Si $\beta = 0$ les équations (3.5) sont identiquement vérifiées quel que soit U_1 et la solution générale de (3.4) est :

(5.8) $$u_2 = v_2(x,\xi)h + \dot{v}_2(x,\xi)$$

où $\dot{v}_2(x,\xi)$ est une solution particulière de (3.4).

On écrit alors les équations que doit vérifier une onde approchée d'ordre 2, $F_2 = 0$, et on élimine v_2 entre (5.8) et $\bar{h}F_2 = 0$. On obtient alors une équation aux dérivées partielles du second ordre pour U_1 qui s'écrit :

(5.9) $$(\bar{A}^\lambda \partial_\lambda + \bar{A}^\xi U_1 \partial_\xi)^2 U_1 + \bar{A}^\xi \dot{U}_1 (\bar{A}^\lambda \partial_\lambda + \bar{A}^\xi U_1 \partial_\xi) U_1 + K(\bar{A}^\lambda \partial_\lambda + \bar{A}^\xi U_1 \partial_\xi) U_1 + L U_1 \dot{U}_1 + N U_1 = 0$$

où K, L, N sont des fonctions sur X . Dans (5.9) apparait la dérivation

$$\bar{A}^\lambda \partial_\lambda + \bar{A}^\xi U_1 \partial_\xi$$

déjà rencontrée au §3, mais ∂_ξ apparaît également seul, de sorte que (5.9) ne se réduit à une équation différentielle ordinaire de propagation le long des rayons (<u>du second ordre</u> dans ce cas) que si $\bar{A}^\xi = 0$ et $L = 0$; des variétés caractéristiques

$\varphi = c^{te}$ pour lesquelles ces conditions sont réalisées seront encore appelées exceptionnelles.

Pour interpréter la condition $L = 0$, dans le cas général, il faudrait définir un polynôme sans caractéristique $j(x,u,p)$ pour un système quasi linéaire, ce que nous n'avons fait que dans le cas d'un <u>système à termes principaux linéaires</u>. On a alors évidemment $\bar{A}^{\xi} = 0$ et, d'autre part, on peut définir, pour le système (1.1) un polynôme en p, $j(x,u,p)$ tel que le polynôme $j(x,p)$ correspondant à une solution u_o soit :

$$j(x,p) = \{j(x,u,p)\}_{u = u_o} .$$

On montre alors que[1]:

$$L = \{Dj(x,u,p)\}_{\substack{u = u_o \\ p_\lambda = \partial_\lambda \varphi}} . h .$$

Donc $L = 0$ si $j(x,u,p)$ est divisible par $\bar{A}(x,p)$ quel que soit u. D'où le

THÉORÈME. <u>Si, pour un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre satisfaisant aux hypothèses du § 5 le polynôme sous-caractéristique $j(x,u,p)$ est divisible par $\bar{A}(x,u,p)$ le premier terme du développement asymptotique est $u_1^i = h^i U_1$ où U_1 est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre, du type</u>

$$(\bar{A}^\lambda \partial_\lambda)^2 U_1 + K\bar{A}^\lambda \partial_\lambda U_1 + NU_1 = 0 .$$

<u>Problème de Cauchy</u>

La résolution approchée du problème de Cauchy, dans le cas non linéaire soulève des difficultés (dues à l'absence du principe de superposition) dont nous ne parlerons pas ici. Nous allons seulement donner une application des résultats du § 4 à la démonstration du <u>caractère mal posé</u> du problème de Cauchy dans le cas de caractéristiques multiples satisfaisant certaines hypothèses, pour les <u>systèmes linéaires</u>.

On dit que le problème de Cauchy est mal posé dans la métrique C^1, si le système linéaire

$$Lu = f ,$$

avec $u = g$ sur S, (S : sous variété différentiable de X)

n'a pas une solution et une seule pour $f \in C^1(S)$ (espaces métriques).

---

(1) pour les détails de la démonstration cf. [6].