

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JACQUES-LOUIS LIONS

Quelques remarques sur les inéquations variationnelles

Séminaire Jean Leray, n° 3 (1969), p. 23-30

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969__3_23_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES REMARQUES SUR LES INÉQUATIONS VARIATIONNELLES

par Jacques-Louis LIONS

Introduction

On donne ici quelques remarques sur la résolution des inéquations variationnelles (au sens de [15]) :

(i) la méthode de pénalisation (N°1) permet de retrouver les résultats essentiels de la théorie à partir des résultats "standard" sur les équations et permet sur les exemples d'obtenir des résultats de régularité (N°2) ;

(ii) la méthode d'interpolation non linéaire (cf. [9]) permet de déduire des résultats de régularité "intermédiaires" des résultats du N°2 ;

(iii) la méthode du "changement de l'espace pivot", brièvement évoquée au N°4 (cf. détails dans [13]) permet de résoudre de nouveaux problèmes unilatéraux (intervenant en Mécanique).

1. Méthode de pénalisation dans les inéquations stationnaires.

1.1. Soit V un espace de Hilbert sur \mathbb{R} et soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue sur V ; on suppose que

$$(1.1) \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall v \in V \quad (\|v\| = \text{norme de } v \text{ dans } V).$$

Soit K un ensemble fermé convexe de V et soit $v \rightarrow L(v)$ une forme linéaire continue sur V .

On sait (cf. [18],[15]) qu'il existe $u \in K$ unique tel que

$$(1.2) \quad a(u, v-u) \geq L(v-u) \quad \forall v \in K.$$

Remarque 1.1.

Il s'agit là du résultat le plus simple relatif aux inéquations variationnelles stationnaires. On peut remplacer " V Hilbert" par un espace de Banach et supprimer la linéarité de l'application $u \rightarrow a(u,v)$ ⁽¹⁾. Cf. [1], [5] et [11].

Notre but est ici de montrer le résultat (1.2) en "approchant" l'inéquation par une famille d'équations.

1.2. Opérateur de pénalisation.

On introduit l'espace dual V' de V (non nécessairement identifié à V) ; on

(1) De manière à essentiellement étendre aux inéquations les résultats établis dans [8] pour les équations.

désignera par J l'isomorphisme canonique (opérateur de dualité) de $V \rightarrow V'$; on appelle opérateur de pénalisation relatif à K tout opérateur β de $V \rightarrow V'$ ayant les propriétés suivantes :

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta \text{ transforme les bornés de } V \text{ en bornés de } V' , \\ \beta \text{ est monotone - i.e. } (\beta(u) - \beta(v), u-v) \geq 0^{(1)} , \forall u, v \in V , \\ \beta \text{ est hemi-continue - i.e. } \lambda \rightarrow (\beta(u+\lambda v), w) \text{ est continue, } \forall u, v, w \in V, \end{array} \right.$$

$$(1.4) \quad K = \{v' \mid v \in V , \beta(v) = 0\} .$$

De tels opérateurs existent. Par exemple, si P_K est l'opérateur de projection de V sur K , alors

$$(1.5) \quad \beta = J \circ (I - P_K)$$

est un opérateur de pénalisation relatif à K .

Remarque 1.2. La notion s'étend au cas des espaces de Banach réflexifs⁽²⁾ ; cf. [9].

1.3. Equation pénalisée d'approximation.

Comme $v \rightarrow a(u, v)$ (resp. $v \rightarrow L(v)$) est continue sur V , on a :

$$(1.6) \quad a(u, v) = (Au, v) \quad , \quad A \in \mathcal{C}(V, V') \quad , \quad L(v) = (f, v) \quad , \quad f \in V' ,$$

et (1.2) équivaut à : $v \in K$ vérifie

$$(1.2 \text{ bis}) \quad (Au - f, v - u) \geq 0 \quad , \quad \forall v \in K .$$

On considère l'équation

$$(1.7) \quad A u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \beta(u_\varepsilon) = f \quad , \quad u_\varepsilon \in V \quad , \quad \varepsilon > 0 .$$

Le terme $\frac{1}{\varepsilon} \beta(u_\varepsilon)$ est le terme "pénalisateur".

On a alors les résultats suivants :

THÉORÈME 1.1. L'équation pénalisée (1.7) admet, pour tout $\varepsilon > 0$, une solution u_ε unique.

THÉORÈME 1.2. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on a

$$(1.8) \quad u_\varepsilon \rightarrow u \text{ dans } V \text{ faible,}$$

u étant la solution de (1.2 bis)⁽³⁾.

(1) Si $f \in V'$ et $v \in V$, (f, v) désigne leur produit scalaire.

(2) Le cas non réflexif nécessiterait l'usage d'opérateurs multivoques.

(3) On démontre par la même occasion l'existence de $u \in K$ solution de (1.2 bis).

Le théorème 1.1 est conséquence de la théorie générale des opérateurs monotones (cf. [16]).

Remarque 1.3.

On peut résoudre (1.7) sans que A soit nécessairement linéaire ; on peut ainsi résoudre par la méthode présente les cas évoqués à la Remarque 1.1 ; cf. [9].

Pour la démonstration du théorème 1.2, on vérifie d'abord que

$$(1.9) \quad u_\varepsilon \text{ demeure, lorsque } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ dans un borné de } V,$$

$$(1.10) \quad (\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon) \leq C \varepsilon.$$

On peut alors extraire une suite, encore notée u_ε , telle que

$$(1.11) \quad u_\varepsilon \rightarrow w \text{ dans } V \text{ faible}$$

et d'après (1.7) $(\beta(u_\varepsilon) = \varepsilon(f - Au_\varepsilon))$:

$$(1.12) \quad \beta(u_\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ dans } V' \text{ faible.}$$

Utilisant (1.10), (1.11), (1.12) et la monotonie de β , on vérifie que

$$(1.13) \quad \beta(w) = 0$$

et donc, d'après (1.4)

$$(1.14) \quad w \in K.$$

Soit alors $v \in K$; donc $\beta(v) = 0$ et donc on déduit de (1.7) que

$$(Au_\varepsilon - f, v - u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} (\beta(v) - \beta(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)$$

d'où grâce à la monotonie de β :

$$(Au_\varepsilon - f, v - u_\varepsilon) \geq 0$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(Au_\varepsilon, v) - (f, v - u_\varepsilon)] \geq \liminf (Au_\varepsilon, u_\varepsilon)$$

soit

$$(Aw, v) - (f, v - w) \geq (Aw, w) ;$$

donc $w \in K$ et vérifie $(Aw - f, v - w) \geq 0$, donc, cette inéquation admettant au plus une solution (vérification immédiate) on a $w = u$ et le résultat.

2. Exemple et application.2.1. Le problème.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ régulière. On désigne par $\partial/\partial n$ la dérivée normale à Γ orientée vers l'extérieur de Ω .

Pour g donnée sur Γ (on précisera dans quel espace), on cherche u solution de

$$(2.1) \quad -\Delta u + u = 0 \quad \text{dans } \Omega .$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} u \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma , \\ \frac{\partial u}{\partial n} \geq g \quad \text{sur } \Gamma , \\ u \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g \right) = 0 \quad \text{sur } \Gamma . \end{cases}$$

Ce problème entre dans le cadre (1.2) ou (1.2 bis) de la manière suivante. Utilisant les espaces de Sobolev, on prend :

$$V = H^1(\Omega), \quad (\text{les fonctions sont prises à } \underline{\text{valeurs réelles}}),$$

$$K = \{v \mid v \in V, v \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma\},$$

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} u v dx ,$$

$$L(v) = (f, v) = \int_{\Gamma} g v d\Gamma , \quad g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) .$$

Alors (2.1) (2.2) équivaut à

$$(2.3) \quad \begin{cases} u \in K , \\ a(u, v-u) \geq \int_{\Gamma} g(v-u) d\Gamma , \quad \forall v \in K . \end{cases}$$

Donc

$$(2.4) \quad \begin{cases} \text{pour } g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) , \text{ le problème (2.1) (2.2) admet une solution } u \\ \text{unique, dans } H^1(\Omega) . \end{cases}$$

En outre, si l'on pose

$$(2.5) \quad u = G(g)$$

on a :

$$(2.6) \quad \|G(g) - G(g_*)\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|g - g_*\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} .$$

2.2. Le problème pénalisé.

On choisit β par :

$$(2.7) \quad (\beta(u), v) = - \int_{\Gamma} u^- v \, d\Gamma,$$

$$\text{où} \quad u^- = \begin{cases} 0 & \text{si } u \geq 0, \\ -u & \text{si } u \leq 0. \end{cases}$$

Le problème pénalisé (1.7) est alors :

$$(2.8) \quad a(u_\varepsilon, v) - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} u_\varepsilon^- v \, d\Gamma = \int_{\Gamma} g v \, d\Gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

ce qui équivaut à

$$(2.9) \quad -\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(2.10) \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^- = g \quad \text{sur } \Gamma.$$

Le problème (2.9) (2.10) est donc le problème pénalisé approché du problème (2.1) (2.2).

D'après les théorèmes 1.1 et 1.2 on sait que :

$$(2.11) \quad u_\varepsilon \text{ existe et est unique dans } H^1(\Omega),$$

$$(2.12) \quad u_\varepsilon \rightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible, lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

2.3. Applications de la pénalisation.

On peut utiliser la pénalisation pour l'étude de la régularité⁽¹⁾ de la solution du problème (2.1) (2.2). On a d'abord :

$$(2.13) \quad \text{si } g \in L^2(\Gamma) \text{ alors } u \in H^{3/2}(\Omega).$$

En effet prenons, ce qui est loisible, $v = -u_\varepsilon^-$ dans (2.8). Comme

$$a(u_\varepsilon, -u_\varepsilon^-) = a(u_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^-, -u_\varepsilon^-) = a(u_\varepsilon^-, u_\varepsilon^-) \geq 0,$$

on déduit de (2.8) que

$$\frac{1}{\varepsilon} \|u_\varepsilon^-\|_{L^2(\Gamma)}^2 = - \int_{\Gamma} g u_\varepsilon^- \, d\Gamma \leq \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|u_\varepsilon^-\|_{L^2(\Gamma)}$$

d'où

$$(2.14) \quad \left\| \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^- \right\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|g\|_{L^2(\Gamma)}.$$

(1) Pour une étude systématique de la régularité, par des méthodes différentes, cf. [4].

On peut donc extraire une suite encore notée u_ε telle que

$$(2.15) \quad \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^- \rightarrow h \quad \text{dans} \quad L^2(\Gamma) \quad \text{faible.}$$

Alors (2.9) (2.10) donnent à la limite

$$(2.16) \quad \begin{aligned} -\Delta u + u &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g + h \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad g+h \in L^2(\Gamma). \end{aligned}$$

On en déduit, d'après [14], que (2.13) a lieu.

Autre résultat de régularité.

On a :

$$(2.17) \quad \text{si } g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \text{alors} \quad u \in H^2(\Omega)$$

et

$$(2.18) \quad \|G(g)\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Pour la démonstration de (2.17), on reprend la démonstration de la régularité de u_ε par la méthode des translations parallèles à la frontière, comme dans [17].

Remarque 2.1.

Pour d'autres exemples et applications, cf. [9].

3. Interpolation non linéaire.

L'application $g \rightarrow G(g)$ introduite en (2.5) a les propriétés suivantes (cf. (2.6) (2.18)) :

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} G \text{ applique } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^2(\Omega) \\ \text{et} \\ \|G(g)\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \end{array} \right.$$

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} G \text{ applique } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega) \\ \text{et} \\ \|G(g) - G(g_*)\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|g - g_*\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \end{array} \right.$$

Sous les conditions (3.1)(3.2) on peut interpoler "entre" ces deux résultats (la structure hilbertienne est ici inutile ; cf. [9] pour un résultat général) et l'on obtient :

THÉORÈME 3.1. L'opérateur G défini par (2.5) applique $H^s(\Gamma)$ dans $H^{s+3/2}(\Omega)$, $-1 \leq s \leq 1$.

Remarque 3.1.

On retrouve ainsi le résultat (2.13), en prenant $s = 0$.

4. Changement d'espace pivot.

Le problème (2.1) (2.2) est un exemple de problème de "mécanique unilatérale" (cf. [7]). Voici un autre type de problème (mécanique unilatérale avec frottement⁽¹⁾): on cherche u solution de

$$(4.1) \quad -\Delta u + u = f \quad \text{dans } \Omega.$$

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \leq g \quad \text{sur } \Gamma, \\ u \frac{\partial u}{\partial n} \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ u \left(\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| - g \right) = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Nous montrons dans [13] que, si $g \in L^2(\Gamma)$, ce problème admet une solution unique dans $H^1(\Omega)$ (en fait dans $H^{3/2}(\Omega)$).

On se ramène pour cela au cadre du N°1.1 mais en prenant le produit scalaire des deux membres de (4.1) avec des fonctions test convenables, le produit scalaire étant pris dans $H^1(\Omega)$ au lieu de $L^2(\Omega)$.

C'est la méthode du changement de l'espace pivot.

Remarque 4.1.

D'autres exemples que (4.1) (4.2) sont donnés dans [13].

Remarque 4.2.

D'autres applications du "changement d'espace pivot" ont été données dans [12].

5. Inéquations d'évolution.

La méthode de pénalisation est applicable aux inéquations d'évolution introduites dans [15] (cf. [1], [2], [3], [11]).

On a pu ainsi étudier dans [10] des problèmes d'inéquations variationnelles d'évolution pour les opérateurs de Navier Stokes et certains opérateurs hyperboliques non linéaires.

(1) Ce problème a été posé par C. Duvaut.

Remarque 5.1.

De nouveaux problèmes d'inéquations d'évolution, pour des opérateurs paraboliques (problèmes liés à la mécanique), sont étudiés dans [6].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. BREZIS. Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité. Annales Institut Fourier, 18(1968), 115-175.
- [2] H. BREZIS. Thèse, Paris, à paraître.
- [3] H. BREZIS et J.L. LIONS. Sur certains problèmes unilatéraux hyperboliques. C.R. Acad. Sc. Paris, 264 (1967), 928-931.
- [4] H. BREZIS et G. STAMPACCHIA. Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. Bull. Soc. Math. France, 96 (1968), 153-180.
- [5] F. BROWDER. Non linear operators ... Proc. Symp. Non linear Functional Analysis, Chicago, avril 1968.
- [6] C. DUVAUT et J.L. LIONS, à paraître.
- [7] G. FICHERA. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. Mem. Accad. Naz. Lincei, 7 (1964), 91-140.
- [8] J. LERAY et J.L. LIONS. Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty et Browder. Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), 97-107.
- [9] J.L. LIONS. Some remarks on variational inequalities. Int. Conference on Functional Analysis, Tokyo, Avril 1969.
- [10] J.L. LIONS. Sur quelques propriétés... C.R. Acad. Sc. Paris, 267 (1968), 631-633 ; 684-685.
- [11] J.L. LIONS. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Paris, Dunod et Gauthier-Villars, 1969.
- [12] J.L. LIONS. Sur quelques problèmes de calcul des variations. Istituto Naz. di Alta Mat. Symp. Math. 2 (1968), 125-144.
- [13] J.L. LIONS. Sur quelques nouveaux exemples de problèmes unilatéraux. Journal of the Faculty of Science, Univ. of Tokyo, Vol. dédié au Prof. Yosida, à paraître.
- [14] J.L. LIONS et E. INGENES. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1, Paris, Dunod, 1968.
- [15] J.L. LIONS et G. STAMPACCHIA. Variational inequalities. Comm. Pure Applied Math. XX (1967), 493-519.

- [16] C.J. MINTY. On a monotonicity method for the solution of non linear equations in Banach spaces. Proc. Nat. Acad. Sc. 50 (1963), 1038-1041.
- [17] L. NIRENBERG. Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Comm. Pure Applied Math. 8 (1955), 648-674.
- [18] G. STAMPACCHIA. Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes. C.R. Acad. Sc. Paris, 258 (1964), 4413-4416.