E. Pardoux

Équations aux dérivées partielles stochastiques de type monotone

Séminaire Jean Leray, n° 3 (1974-1975), exp. n° 2, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1974-1975___3_A2_0>

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES STOCHASTIQUES DE TYPE MONOTONE

par E. PARDOUX

§ 1. INTRODUCTION

On présente des résultats de [6] sur l'existence, l'unicité et la régularité d'une solution de l'équation.

$$(1.1.)\quad \begin{cases} du(t) + A\,(u(t))\,dt + B\,(u(t))\,dw(t) = f(t)\,dt + dM(t) \\ u(o) = u_o \end{cases}$$

où A et B sont des opérateurs non bornés dans des espaces de Hilbert [dans les applications ce seront des opérateurs aux dérivées partielles], qui vérifient une hypothèse de monotonie, $W(t)$ est un processus de Wiener hilbertien, et $M(t)$ est une martingale à valeurs hilbertiennes.

Pour étudier ce type d'équation, nous aurons besoin de :

- Une théorie des équations aux dérivées partielles monotones,
- Une théorie des intégrales stochastiques hilbertiennes.

§ 2. EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES MONOTONES (cf. LIONS [3]).

Soit V un espace de Banach réel séparable et réflexif, H un espace de Hilbert réel tels que : $V \subset H$, avec densité et injection continue. Alors si l'on identifie H à son dual, on a : $V \subset H \subset V'$.

On notera $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ et $\|\cdot\|_*$ les normes dans V, H et V' respectivement, $(.,.)$ le produit scalaire dans H, et $<.,.>$ le produit de dualité V,V'.

Soit p un réel supérieur à 1

On a tout d'abord le :

LEMME 2. 1 Si $u \in L^p(0,T;V)$, $\frac{du}{dt} \in L^{p'}(0,T;V')$,

alors : (i) $u \in C(0,T;H)$

(ii) $$|u(t)|^2 = |u(s)|^2 + 2\int_s^t <u(\tau), \frac{du}{dt}(\tau)> d\tau, \ \forall\ s,t \in [0,T]$$

■

Soit A un opérateur de V dans V' qui vérifie.

(2.1) coercivité : $<A(u),u> \geqq \alpha \|u\|^p$, $\alpha > 0$, $\forall\ u \in V$

(2.2) hémicontinuité : $\lambda \to <A(u+\lambda v),w>$ est continue de R dans R, $\forall\, u,v$ et $w \in V$

(2.3) bornitude : $\|A(u)\|_* \leq \beta \|u\|^{p-1}$, $\forall\, u \in V$

(2.4) monotonie : $<A(u) - A(v), u-v> \geqq 0$, $\forall u,v \in V$

On a alors le :

THEOREME 2.1. - Si $u_o \in H$, $f \in L^{p'}(0,T;V')$, alors l'équation :

(2.5) $$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A(u) = f \\ u(o) = u_o \end{cases}$$

a une solution unique $u \in L^p(0,T;V)$. De plus $u \in C(0,T;H)$ grâce au lemme 2.1

■

REMARQUE 2.1. La démonstration du lemme 2.1 ne fait pas intervenir d'opérateur A. Le lemme 2.1 est utilisé dans la démonstration du théorème 2.1, dans la mise en oeuvre de la méthode de monotonie.

§ 3. MARTINGALES ET INTEGRALES STOCHASTIQUES HILBERTIENNES (cf. METIVIER [4], PARDOUX [5])

Soient $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace de probabilité, $\mathcal{F}_t, t\in[0,T]$, une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, telle que $\mathcal{F}_o$ contienne tous les P-négligeables de $\mathcal{F}$, et H un espace de Hilbert séparable.

Définition 3.1. On appellera martingale à valeurs dans H un processus $(M(t))_{t\in[0,T]}$ tel que.

$$\text{(i)}\quad \forall\, t\in[0,T], M(t)\in L^1(\Omega,\mathcal{F}_t,P;H)$$

$$\text{(ii)}\quad E^{\mathcal{F}s}(M(t) = M(s)$$

■

Définition 3.2. On notera $\mathcal{M}^2(H)$ l'espace des martingales p-s- continues à valeurs dans H, qui vérifient :

$$\text{(i)}\quad M(0) = 0$$
$$\text{(ii)}\quad M(T)\in L^2(\Omega\ ;\ H)$$

[(ii) $\Rightarrow M(t)\in L^2(\Omega\ ;\ H), \forall\, t\in[0,T]$, d'après les propriétés des martingales].

□

Rappelons qu'un opérateur $Q\in\mathcal{L}(H)$, auto adjoint, ≥ 0 et compact est nucléaire si et seulement si la somme de ses valeurs propres λ_i converge, et alors :

$$\operatorname{Tr} Q = \sum_i \lambda_i = \| Q \|_1$$

On notera $\mathcal{L}^1(H)$ l'espace des opérateurs nucléaires. Si $u\in H$, $u\otimes u$ désignera l'élément de $\mathcal{L}^1(H)$ défini par :

$$u\otimes u\,(h) = (u,h)\,u\ ,\quad \forall\, h\in H$$

BLE I

On a le :

THEOREME 3.1. - Si $M \in \mathcal{M}^2(H)$, $\exists$ un et seul processus $\ll M \gg_t$ à valeurs dans $\mathcal{L}^1(H)$ t.q. :

(i) $t \to \ll M \gg_t$ est p.s. continue et croissante, $\ll M \gg_t$ est auto adjoint $\forall t$.

(ii) $M(t) \otimes M(t) - \ll M \gg_t$ est une martingale à valeurs dans $\mathcal{L}^1(H)$

(iii) $|M(t)|^2 - \mathrm{Tr} \ll M \gg_t$ est une martingale réelle.

$\blacksquare$

Soit K un autre espace de Hilbert, et $(\Phi(t))_{t \in [0,T]}$ un processus à valeurs dans $\mathcal{L}(H : K)$, p.s. continu et adapté (i.e. $\Phi(t)$ est $\mathcal{F}_t$ - mesurable $\forall t \in [0,T]$, tel que

$$\int_0^t \|\Phi(t)\|^2_{\mathcal{L}(K,\, H)}\, d\{\mathrm{Tr} \ll M \gg_t\} < \infty, \text{p.s.} \tag{3.1}$$

Alors on peut, en utilisant le Théorème 3.1, définir l'intégrale stochastique :

$$\int_0^t \Phi(s)\, dM(s)$$

qui est un processus à valeurs dans K.

En particulier, si $u \in C(0,T;H)$ p.s.) et u est adapté, on peut définir le processus réel :

$$\int_0^t (u(s), dM(s))$$

Un exemple de martingale de $\mathcal{M}^2(H)$ est donné par le processus de Wiener (cf BENSOUSSAN [1]) W_t, où : $\ll W \gg_t = tQ$, $Q \in \mathcal{L}^1(H)$

Dans ce cas, la condition (3.1) s'écrit :

$$\int_0^T \|\Phi(t)\|^2 \|Q\|_1\, dt < \infty \text{ p.s.}$$

En fait, il suffit d'avoir :

$$\int_0^t \|\, \Phi(t)\; Q\; \Phi(t)^* \|_1\, dt < \infty \text{ p.s.} \tag{3.2}$$

et que $(\Phi(t))_{t \in [0,T]}$ soit un processus mesurable et adapté, pour que l'on puisse définir

$$\int_0^t \Phi(s)\, dW(s).$$

Et si de plus :

(3.3) $$E \int_0^T \|\Phi(t)\, Q\, \Phi(t)^*\|_1 \, dt < \infty$$

alors $\int_0^{\cdot} \Phi\, dW \in \mathcal{M}^2(K)$, et $\ll \int_0^{\cdot} \Phi\, dW \gg_t = \int_0^t \Phi(s)\, Q\, \Phi^*(s)\, ds$

§ 4. ETUDE DE L'EQUATION (1.1)

Nous pouvons maintenant étudier l'équation (1.1). On se donne :

(4.1) $$M \in \mathcal{M}^2(H)$$

(4.2) $W(t)$ processus de Wiener à valeurs dans K, d'opérateur de covariance

$$Q \in \mathcal{L}^1(H)$$

(4.3) $$f \in L^{p'}(\Omega \times]0,T[\,; V'), \quad \text{adapté}$$

(4.4) $$u_0 \in L^2(\Omega\,; H), \ \mathcal{F}_0 - \text{mesurable}$$

On se donnera de plus deux opérateurs :

$$A : V \to V' \quad \text{et} \quad B : V \to \mathcal{L}(K\,; H).$$

Notre théorème d'existence et d'unicité pour l'équation (1.1) se démontrera de façon analogue au théorème 2.1. Nous aurons donc besoin de l'équivalent du lemme 2.1.

Or, une solution de l'équation (1.1) sera de la forme :

(4.5) $$u \in L^p(\Omega \times]0,T[\,; V)$$

(4.6) $$u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)\, ds + N(t)$$

où :

(4.7) $$u_0 \in L^2(\Omega\,; H), \mathcal{F}_0 - \text{mesurable}$$

(4.8) $$v \in L^{p'}(\Omega \times]0,T[\,; V') \ \text{adapté} \quad [v = f - A(u)]$$

(4.9) $$N \in \mathcal{M}^2(H) \quad [\, N(t) = M(t) - \int_0^t B(u)\,dW \,]$$

On a alors le :

LEMME 4.1. - Si u vérifie (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) et (4.9), et si de plus le triplet (V,V',p) est tel qu'il existe un opérateur A qui vérifie (2.1)... (2.4), alors :

$$u \in L^2(\Omega\ ;\ C(0,T\ ;\ H))$$

(4.10) $$|u(t)|^2 = |u_o|^2 + 2\int_o^t <u(s),v(s)> ds + 2\int_o^t (u(s),dM(s)) + \mathrm{Tr} \ll M \gg_t$$

(4.11) $$E|u(t)|^2 = E|u_o|^2 + 2\,E\int_o^t <u(s),v(s)> ds + E\,|M(t)|^2$$

Démonstration : on suppose tout d'abord :

$$M \in L^p(0,T\ ;\ V) \text{ p.s.}$$

Alors $\tilde{u}(t) = u_o + \int_o^t v(s)\,ds$ vérifie p.s. les hypothèses du Lemme 2.1, d'où :

$$\tilde{u} \in C(0,T\ ;\ H) \text{ p.s.}$$

(4.12) $$|\tilde{u}(t)|^2 = |u_o|^2 + 2\int_o^t <\tilde{u}(s),v(s)> ds$$

En utilisant le calcul différentiel stochastique de Ito, on peut, par des intégrations par parties, retrouver (4.10) à partir de (4.12).

Il faut maintenant passer à la limite sur ce résultat. Pour cela, on ne peut pas prendre une suite du type.

$$du^n(t) = v(t)\,dt + dM^n(t)$$

car il n'y aurait aucune raison que $u^n \in L^p(0,T\ ;\ V)$ p.s.

On va donc utiliser l'opérateur A, et poser :

(4.12) $$\begin{cases} du^n(t) + A(u^n(t))\,dt = (v(t) + A(u(t)))\,dt + dM^n(t) \\ u^n(o) = u_o \end{cases}$$

avec $M^n \in \mathcal{M}^2(H), M^n \in L^p(0,T\,;\,V)$ p.s.

et $M^n \to M$ dans $\mathcal{M}^2(H)$

LEMME 4.2. - L'équation (4.12) a une solution unique :

$$u^n \in L^p(\Omega \times]0,T[\,;\,V) \cap L^2(\Omega\,;\,C(0,T\,;\,H))$$

Ce Lemme se démontre aisément en posant $\tilde{u}^n = u^n - M$, et étudiant l'équation en $\tilde{u}^n$ à l'aide du Théorème 2.1.

■

L'étape cruciale de la démonstration consiste à établir le lemme suivant, que nous admettrons :

LEMME 4.3. - L'équation :

$$\text{(4.13)} \qquad \begin{cases} dw(t) + A(w(t))\,dt = (v(t) + A(u(t)))\,dt + dM(t) \\ \qquad\qquad w(o) = u_o \end{cases}$$

a une solution unique $w \in L^p(\Omega \times]0,T[\,;\,V)$.

de plus :

$$\text{(4.14)} \qquad w \in L^2(\Omega\,;\,C(0,T\,;\,H))$$

(4.15) $u^n \to w$ dans $L^p(\Omega \times]0,T[\,;\,V)$ faible et dans $L^2(\Omega\,;\,C(0,T\,;\,H))$

$$\text{(4.16)} \qquad \int_o^t < A(u^n), u^n > ds \to \int_o^t < A(w), w > ds \quad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ faible, } \forall t.$$

On peut alors démontrer le Lemme 4.1. En effet, grâce à l'unicité, $w = u$, et d'après (4.15) et (4.16), on peut passer à la limite dans :

$$|u^n(t)|^2 = |u_o|^2 + 2\int_o^t < v + A(u) - A(u^n), u^n > ds + 2\int_o^t (u^n, dM) + Tr \ll M^n \gg_t$$

ce qui démontre (4.10). De plus $u \in L^2(\Omega\,;\,C(0,T\,;\,H))$ grâce au Lemme (4.3), et (4.11) s'obtient en prenant l'espérance mathématique dans (4.10).

■

Remarque 4.1 . Le Lemme 4.1 a été démontré d'une façon totalement différente du Lemme 2.1. On a utilisé l'opérateur A.

Remarque 4.2. Nous avons déjà résolu, au Lemme 4.3, l'équation (1.1), dans le cas où $B = 0$

Remarque 4.3. La relation (4.10) est une formule de Ito, pour la fonctionnelle $\Phi(u) = |u|^2$, où u n'est pas une semi-martingale hilbertienne, mais un processus d'un type un peu plus complexe. On peut établir (cf. [6]) des formules de Ito, avec ce même type de processus, pour une classe assez générale de fonctions Φ. Un tel résultat permet d'étudier certaines propriétés des solutions (cf. ci-dessous).

Nous pouvons maintenant "deviner" les hypothèses à faire sur les opérateurs A et B. En effet, si $u \in L^p(\Omega\times]0,T[; V)$ est solution de (1.1), d'après (4.11), on aura :

$$(4.17)\quad \begin{aligned} &E\,|u(t)|^2 + E\int_0^t [2 < A(u),u> - \| B(u)\ Q\ B(u)^* \|_1]ds = E\,|u_o|^2 + \\ &+ 2\,E\int_0^t < f,u > ds + E\,|M(t)|^2 - 2\,E(M(t), \int_0^t B(u)dW) \end{aligned}$$

D'après la forme de l'égalité de l'énergie (4.17), on est amené à faire les hypothèses :

(4.18) Coercivité : $2 < A(u),u > - \|B(u)\ Q\ B(u^*)\|_1 + \lambda\,|u|^2 \geq \alpha\,\|u\|^p$

$\alpha > 0,\ \forall\, u \in V$

(4.19) Monotonie : $2 < A(u) - A(v),u - v > + \lambda\,|u - v|^2 -$

$- \|B(u)\,Q\,B(u)^* - B(v)\,Q\,B(v)^*\|_1 \geq 0,\ \forall\, u,v \in V$

On suppose de plus :

(4.20) A est hémicontinu et borné

(4.21) B est localement lipschitzien de V dans $\mathcal{L}(K ; H)$

On peut alors montrer, par une méthode voisine de celle du théorème 2.1, le :

THEOREME 4.1. - Sous les hypothèses (4.1)...(4.4) et (4.18)..(4.21), l'équation (1.1) a une solution unique :

$$u \in L^p(\Omega \times]0,T[; V) \cap L^2(\Omega ; C(0,T ; H))$$

adapté à la famille $\mathcal{F}_t$

■

§ 5. EXEMPLE

Notre exemple est un modèle de croissance de population, proposé par FLEMING [2]

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de R^n, de frontière Γ. On étudie

$$(5.1)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) - ku(t,x) + \ell\, |u(t,x)|u(t,x) = \\ \qquad = \sigma\, u(t,x)\, dW(t,x) \\ u(o,x) = u_o(x),\ \frac{\partial u}{\partial n}(t,x)\Big|_{\Gamma \times]0,T[} = 0 \end{cases}$$

$u(t,x)$ désigne la densité d'une certaine population à l'instant t et au point x, k, ℓ et σ sont des constantes positives, $W(t)$ est un processus de Wiener sur $H = L^2(\mathcal{O})$, d'opérateur de covariance $Q \in \mathcal{L}^1(L^2(\mathcal{O}))$. On suppose en outre que le noyau de Q vérifie : $q(x,y) \in L^\infty(\mathcal{O}\times\mathcal{O})$. On suppose que $u_o \in L^2(\Omega\ ;\ L^2(\mathcal{O}))$

Posons :

$$V_1 = H^1(\mathcal{O}),\quad A_1(u) = -\Delta u$$

$$V_2 = L^3(\mathcal{O}),\quad A_2(u) = -ku + \ell\,|u|u$$

$K = H = L^2(\mathcal{O})$, $B(u)$ est l'opérateur de multiplication par $u(x)$. Cet opérateur n'est pas linéaire continu de $L^2(\mathcal{O})$ dans lui-même. Mais grâce aux hypothèses faites sur Q, $B(u)\, Q\, B(u)^* \in \mathcal{L}^1(L^2(\mathcal{O}))$ et $\|B(u)\, Q\, B(u)^*\|_1 \leq C\, |u|$

On peut donc appliquer le théorème 4.1 (ou plutôt sa variante pour une somme d'opérateurs), et l'équation (5.1) a une solution unique :

$$u \in L^2(\Omega\times\ ]0,T[\ ;\ H^1(\mathcal{O})) \cap L^3(\Omega\times]0,T[\times\mathcal{O}) \cap$$
$$\cap\ L^2(\Omega\ ;\ C(0,T\ ;\ L^2(\mathcal{O}))$$

On peut de plus montrer que si $u_o(x) \geq 0$ p.p. p.s., alors, p.s.,

$$u(t,x) \geq 0 \quad \text{p.p.}x,\ \forall t \in [0,T].$$

Ce dernier résultat se démontre en utilisant la formule de Ito appliquée aux :

$$\Phi_\epsilon(u) = \int_{\mathcal{O}} \varphi_\epsilon(u(x))\, dx$$

où φ_ϵ "approxime" la fonction $y \to |y^-|^2$ en vérifiant :

$$\varphi_\epsilon \in C^2(\mathbb{R})$$

$$0 \leq \varphi_\epsilon(y) \leq |y^-|^2$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BENSOUSSAN . Filtrage optimal des systèmes linéaires . Dunod

[2] W. H. FLEMING . Distributed Parameter Stochastic Systems in population biology. Conf. Cont. Stoch. IRIA 1974

[3] J.L. LIONS . Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires . Dunod-Gauthier Villars 1970

[4] M. METIVIER . Intégrales stochastiques par rapport à des processus à valeurs dans un espace de Banach réflexif

[5] E. PARDOUX . Intégrales stochastiques hilbertiennes (à paraître)

[6] E. PARDOUX . Thèse (à paraître).