

SÉMINAIRE JANET. MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE CÉLESTE

ANDRÉ AVEZ

Modèle d'univers stationnaire sans section d'espace globale

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 5 (1961-1962),
exp. n° 16, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SJ_1961-1962__5__A15_0

© Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODÈLE D'UNIVERS STATIONNAIRE SANS SECTION D'ESPACE GLOBALE

par André AVEZ

1. Introduction et notations.

D. AUFENKAMP [1] a démontré qu'il ne pouvait exister d'univers stationnaire à section d'espace compacte en l'absence de constante cosmologique. J'ai étendu [2] ce résultat en montrant qu'il ne pouvait exister de modèle d'univers périodique clos sans constante cosmologique.

Cela pose les problèmes suivants :

Peut-on étendre ces résultats aux espaces-temps compacts les plus généraux en démontrant qu'il existe toujours une section d'espace globale ?

Dans la négative peut-on néanmoins étendre ces théorèmes en l'absence de sections d'espace globales ?

Nous allons répondre à ces questions en construisant un modèle d'univers U doué des propriétés suivantes :

- Il est compact et orientable, mais sans section d'espace globale.
- Il est stationnaire et schématise un fluide parfait - champ électromagnétique.
- Les lignes de temps sont fermées.
- La constante cosmologique est nulle.

Les notations utilisées seront celles de LICHNEROWICZ [3].

2. La topologie de U .

Rappels [4]. - Soient V_n une variété de dimension n , orientable et différentiable, W_{n-1} une sous-variété de dimension $n-1$, compacte, orientable, et différentiable. Si γ est un lacet de V_n , c'est-à-dire une application continue de T^1 dans V_n , on peut définir un nombre algébrique d'intersection de γ et W_{n-1} orientés. Ce sera l'indice de Kronecker $W_{n-1} \wedge \gamma[1]$. On sait qu'il ne dépend que de la classe d'homotopie de $\gamma[1]$.

Supposons V_n compact et porteur d'un champ de vecteurs \vec{u} régulier et différentiable, dont les trajectoires γ sont fermées. Si W_{n-1} est transverse à \vec{u} , \vec{u} oriente le fibré normal de W_{n-1} . Avec cette orientation, il est clair

que $W_{n-1} \wedge \gamma[1] \geq 0$, l'égalité n'étant obtenue que si $W_{n-1} \cap \gamma = \emptyset$.

LEMME. - Si S^3 est la sphère centrée à l'origine et de rayon unité de l'espace euclidien E^4 rapporté au repère orthonormé $(0 \ x \ y \ z \ t)$, il n'existe pas sur S^3 de surface orientable transverse au champ \vec{u} de composantes $(-y, x, -t, z)$.

Démonstration. - La restriction du champ \vec{u} à S^3 définit sur S^3 un champ de vecteurs tangents et unitaires puisque :

$$\begin{aligned} x(-y) + yx + z(-t) + tz &= 0 & , \\ (-y)^2 + x^2 + (-t)^2 + z^2 &= 1 & . \end{aligned}$$

Les trajectoires γ sont définies par le système :

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{-t} = \frac{dt}{z} \quad ,$$

dont l'intégration est immédiate. On trouve :

$$x = A \cos \theta, \quad y = A \sin \theta, \quad z = B \cos(\theta + C), \quad t = B \sin(\theta + C)$$

où les constantes d'intégration A, B, C sont liées par $A^2 + B^2 = 1$. Les trajectoires de \vec{u} sont donc fermées : elles définissent une fibration de Hopf de S^3 . De plus, comme S^3 est simplement connexe, elles sont homotopes à zéro. Par suite, quelle que soit la variété compacte, orientable et différentiable W_2 de S^3 : $W_2 \wedge \gamma[1] = 0$. Le lemme résulte alors de la remarque qui la précède.

LEMME. - Sur la variété $S^3 \times T^1$ il n'existe pas de sous-variété compacte, orientable, différentiable, à trois dimensions, et transverse au champ vectoriel dont la projection sur S^3 est le champ du lemme précédent et dont la projection sur T^1 est nulle.

Démonstration. - Par l'absurde. Soit W_3 une sous-variété de $S^3 \times T^1$, compacte, orientable, différentiable, à trois dimensions, et transverse au champ précité. Pour tout $t \in T^1$, $S^3 \times \{t\}$ coupe W_3 suivant une surface $W_2(t)$, compacte, orientable, différentiable, et transverse au champ du lemme précédent dans $S^3 \times \{t\}$. Par suite $W_2(t) = \emptyset$, cela pour tout t , donc $W_3 = \emptyset$.

THÉORÈME. - Sur la variété $S^3 \times T^1$ il n'existe pas de sous-variété compacte, orientable, différentiable, et orientée dans l'espace au sens d'une métrique hyperbolique normale définie sur $S^3 \times T^1$ et pour laquelle le champ du lemme précédent serait orienté dans le temps.

Démonstration. - Résulte de ce que toute variété orientée dans l'espace est transverse au champ du lemme précédent.

Nous allons obtenir l'univers U comme produit riemannien de S^3 et T^1 convenablement métrisés.

3. La métrique de S^3 .

Convenons que les indices latins sont relatifs à S^3 . La métrique euclidienne de E^4 induit sur S^3 une métrique elliptique l_{ij} . On a vu que la restriction à S^3 du champ \vec{u} de E^4 y définit un champ de vecteurs tangents et unitaires au sens de l_{ij} : soit u_i . Si r est une constante supérieure à 1, nous munirons S^3 de la métrique

$$g_{ij} = - l_{ij} + r u_i u_j \quad ,$$

dont on s'assure aisément qu'elle est hyperbolique normale. En affectant d'une astérisque les éléments relatifs à g_{ij} , les éléments étoilés étant relatifs à l_{ij} , on a :

$$g^{*ij} = - l^{ij} + \frac{r}{r-1} u^i u^j$$

où g^{*ij} est défini par $g_{ik} g^{*kl} = \delta_i^l$.

Calculons le tenseur de Ricci R_{ij}^* relatif à g_{ij} . Le tenseur dérivé du premier ordre du vecteur \vec{u} de E^4 a pour matrice dans le repère $Oxyz$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Comme cette matrice est antisymétrique, \vec{u} engendre un groupe d'isométries de E^4 . Ce groupe laisse invariant S^3 puisque \vec{u} est tangent à S^3 . Il induit donc sur S^3 , munie de la métrique l_{ij} , un groupe d'isométries. Ainsi

$\nabla_i u_j + \nabla_j u_i = 0$. Mais si on pose

$$C_{ij}^k = \Gamma_{ij}^{*k} - \Gamma_{ij}^k \quad ,$$

un calcul facile prouve que :

$$C_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{*kl} (\nabla_i g_{lj} + \nabla_j g_{li} - \nabla_l g_{ij}) \quad .$$

Puisque $\nabla_i u_j + \nabla_j u_i = 0$, en remplaçant g_{ij} par sa valeur :

$$C_{ij}^k = r(u_j \nabla^k u_i + u_i \nabla^k u_j) \quad .$$

Comme $\nabla_i u^i = 0$, on tire $C_{ij}^i = 0$.

Avec les notations ci-dessus, des calculs locaux montrent que :

$$R_{ij}^* = R_{ij} + \nabla_k C_{ij}^k - \nabla_i C_{kj}^k + C_{kl}^k C_{ij}^l - C_{ki}^l C_{lj}^k \quad .$$

Comme il est bien connu, le tenseur de Ricci de S^3 dans la métrique l_{ij} est $R_{ij} = 2l_{ij}$, par suite :

$$R_{ij}^* = 2l_{ij} + \nabla_k C_{ij}^k + r^2 u_i u_j \nabla^l u^k \nabla_l u_k \quad .$$

Pour évaluer $\nabla_k C_{ij}^k$ partons de l'identité

$$R_{ki} u^k = \nabla^k \nabla_i u_k - \partial_i \nabla^k u_k \quad .$$

Elle s'écrit : $2u_i = -\nabla^k \nabla_k u_i$. Cela, joint à la formule donnant C_{ij}^k entraîne :

$$\nabla_k C_{ij}^k = -4ru_i u_j + 2r \nabla^k u_i \cdot \nabla_k u_j \quad .$$

Par suite :

$$R_{ij}^* = 2l_{ij} - 4r u_i u_j + 2r \nabla^k u_i \cdot \nabla_k u_j + r^2 u_i u_j \nabla^l u^k \nabla_l u_k \quad .$$

Evaluons $\nabla^k u_i \cdot \nabla_k u_j$.

Rapportons E^4 au système de coordonnées polaires (x^1, x^2, x^3, x^4) . La distance d'un point M de E^4 à l'origine étant x^4 , (x^1, x^2, x^3) fixant la position de la trace de OM sur S^3 . Les indices latins varieront de 1 à 3, les indices majuscules de 1 à 4. Enfin, nous affecterons d'une barre les éléments relatifs à E^4 muni de sa métrique usuelle. Puisque x^4 est la distance OM : $\bar{l}^{44} = \bar{l}_{44} = 1$. Puisque le système de coordonnées est orthogonal : $\bar{l}^{4i} = \bar{l}_{4i} = 0$.

Puisque l_{ij} est la métrique induite par le plongement dans E^4 :

$$(\bar{l}_{ij})_{S^3} = l_{ij}, \quad (\bar{l}^{ij})_{S^3} = l^{ij}.$$

Puisque le champ u_i de S^3 est la restriction à S^3 du champ \vec{u} de E^4 :
 $\bar{u}^4 = \bar{u}_4 = 0$, $(\bar{u}_i)_{S^3} = u_i$.

Par suite :

$$(\bar{\nabla}_i \bar{u}_j)_{S^3} = (\partial_i \bar{u}_j - \bar{\Gamma}_{ij}^A \bar{u}_A)_{S^3} = (\partial_i u_j - \bar{\Gamma}_{ij}^k u_k)_{S^3}.$$

Mais :

$$\begin{aligned} (\bar{\Gamma}_{ij}^k)_{S^3} &= \frac{1}{2} (\bar{l}^{kA} (\partial_i \bar{l}_{Aj} + \partial_j \bar{l}_{Ai} - \partial_A \bar{l}_{ij}))_{S^3} \\ &= \frac{1}{2} l^{ks} (\partial_i l_{sj} + \partial_j l_{si} - \partial_s l_{ij}) = \Gamma_{ij}^k, \end{aligned}$$

donc :

$$(\bar{\nabla}_i \bar{u}_j)_{S^3} = \nabla_i u_j.$$

Puisque \vec{u} engendre un groupe d'isométries de E^4 :

$$(-\bar{\nabla}_4 \bar{u}_i)_{S^3} = (\bar{\nabla}_i \bar{u}_4)_{S^3} = (\partial_i \bar{u}_4 - \bar{\Gamma}_{i4}^A \bar{u}_A)_{S^3} = -(\bar{\Gamma}_{i4}^k u_k)_{S^3}.$$

Mais :

$$\begin{aligned} (\bar{\Gamma}_{i4}^k)_{S^3} &= \frac{1}{2} (\bar{l}^{kA} (\partial_i \bar{l}_{A4} + \partial_4 \bar{l}_{Ai} - \partial_A \bar{l}_{i4}))_{S^3} \\ &= \frac{1}{2} l^{ks} (\partial_4 \bar{l}_{si})_{S^3} = \delta_i^k, \end{aligned}$$

car, sur S^3 ,

$$(\partial_4 \bar{l}_{si})_{S^3} = (2x^4 \bar{l}_{si})_{S^3} = 2l_{si}.$$

Par suite

$$(\nabla_4 \bar{u}_i)_{S^3} = u_i \quad .$$

Sur S^3 on a donc :

$$\begin{aligned} (\nabla_A \bar{u}_i \nabla^A \bar{u}_j)_{S^3} &= (g^{44} \nabla_4 \bar{u}_i \nabla_4 \bar{u}_j + g^{kl} \nabla_k \bar{u}_i \nabla_l \bar{u}_j)_{S^3} \\ &= u_i u_j + \nabla^k u_i \cdot \nabla_k u_j \quad . \end{aligned}$$

Mais de l'évaluation de $\nabla_A \bar{u}_B$ trouvée dans le repère $0 \ x \ y \ z \ t$, on tire

$$\nabla_A \bar{u}_B \nabla^B \bar{u}_C = -\bar{l}_{AC} \quad .$$

Par suite :

$$\nabla_A \bar{u}_i \nabla^A \bar{u}_j = \bar{l}_{ij} \quad .$$

Avec la formule ci-dessus, cela donne :

$$\nabla^k u_i \cdot \nabla_k u_j = \bar{l}_{ij} - u_i u_j \quad ,$$

et

$$\nabla^k u^\ell \nabla_k u_\ell = 2 \quad .$$

En portant dans l'expression trouvée pour R_{ij}^* :

$$R_{ij}^* = -2(r+1) g_{ij} + 4r(r-1) u_i u_j \quad .$$

4. La métrique de U .

La variété U est le produit riemannien de S^3 muni de la métrique g_{ij} par T^1 muni de sa métrique triviale changée de signe.

Il est clair que la métrique de U , que nous désignerons par $g_{\lambda\mu}$, est hyperbolique normale en même temps que g_{ij} . Enfin, si $R_{\alpha\beta}$ désigne le tenseur de Ricci de U , u_α le champ de vecteur défini sur $S^3 \times T^1$ du paragraphe 2, v_α le vecteur unitaire tangent aux variétés facteurs images de T^1 :

$$R_{\alpha\beta} = -2(r+1)(g_{\alpha\beta} + v_{\alpha} v_{\beta}) + 4r(r-1) u_{\alpha} u_{\beta} \quad .$$

Ceci, d'après l'expression de R_{ij}^* .

THÉOREME. - Le champ u_{α} engendre sur U un groupe d'isométries à trajectoires orientées dans le temps et fermées.

Démonstration. - Que les trajectoires soient fermées résulte de la définition de \vec{u} et de l'étude faite sur la topologie de U .

Ces trajectoires sont orientées dans le temps. En effet :

$$g_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = g_{ij} u^i u^j = (-l_{ij} + ru_i u_j) u^i u^j = r - 1 > 0 \quad .$$

Montrons enfin que

$$\nabla_{\alpha} u_{\beta} + \nabla_{\beta} u_{\alpha} = 0 \quad .$$

Puisque U est un produit riemannien, il suffit de démontrer que u_i engendre un groupe d'isométries de S^3 munie de g_{ij} . En revenant aux notations du paragraphe 3 :

$$\nabla_i^* u_j = \nabla_i u_j - u_k C_{ij}^k \quad .$$

Mais u_i engendre un groupe d'isométries de S^3 munie de l_{ij} et

$$C_{ij}^k = r(u_j \nabla^k u_i + u_i \nabla^k u_j) \quad ,$$

donc : $u_k C_{ij}^k = 0$, et ainsi

$$\nabla_i^* u_j + \nabla_j^* u_i = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i = 0 \quad .$$

5. Interprétation physique de U .

Rappelons (voir [3], p. 18-26) que si s_0, s_1, s_2, s_3 désignent les valeurs propres d'un tenseur normal symétrique $T_{\lambda\mu}$ par rapport au tenseur métrique $g_{\lambda\mu}$, pour que $T_{\lambda\mu}$ puisse être interprété comme le tenseur impulsion-énergie d'un schéma fluide parfait - champ électromagnétique, il faut et il suffit que :

$$s_0 > s_1 \quad , \quad s_0 > s_2 \quad , \quad s_1 > s_3 \quad , \quad s_2 \geq s_3 \quad , \quad s_1 + s_2 \leq 0 \quad , \quad s_0 + s_3 > \frac{s_1 + s_2}{2} \quad .$$

THÉOREME. - Si $r > 1 + \sqrt{2}$, U schématise un fluide parfait - champ électromagnétique sans constante cosmologique.

Démonstration. - Avec les notations usuelles, les équations d'Einstein s'écrivent :

$$R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} (R + k) = \chi T_{\lambda\mu} \quad .$$

De l'expression trouvée pour $R_{\lambda\mu}$ et de ce que $g_{\lambda\mu} u^\lambda u^\mu = 1$, $g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu = -1$, on tire :

$$\chi T_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} \left(-\frac{k}{2} - 2r^2 + 3r + 1 \right) - 2(1+r) v_\lambda v_\mu + 4r(r-1) u_\lambda u_\mu \quad .$$

Les valeurs propres de $\chi T_{\lambda\mu}$ par rapport à $g_{\lambda\mu}$ sont :

$$s_0 = -\frac{1}{2} k + 2r^2 - r + 1 \quad ,$$

$$s_1 = -\frac{1}{2} k - 2r^2 + 5r + 3 \quad ,$$

$$s_2 = s_3 = -\frac{k}{2} - 2r^2 + 3r + 1 \quad .$$

Des calculs faciles montrent que $T_{\lambda\mu}$ peut être interprété comme le tenseur impulsion-énergie d'un schéma fluide parfait - champ électromagnétique sans constante cosmologique ($k = 0$) dès que $r > 1 + \sqrt{2}$.

6. Résumé.

En réunissant les résultats obtenus, on voit que le modèle d'univers U est compact, orientable, homéomorphe à $S^3 \times T^1$, sans section d'espace globale compacte, stationnaire, à lignes de temps fermées, schématisant un fluide parfait - champ électromagnétique sans constante cosmologique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AUFENKAMP (Don). - Sur l'impossibilité d'univers stationnaire clos, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 232, 1951, p. 213-214.
- [2] AVEZ (André). - Propriétés globales des espaces-temps périodiquement clos, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 3585-3587.
- [3] LICHNEROWICZ (André). - *Théorie relativiste de la gravitation et de l'électromagnétisme.* - Paris, Masson, 1955 (Collection d'Ouvrages de Mathématiques à l'Usage des Physiciens).
- [4] de RHAM (Georges). - Variétés différentiables. 2e édition. - Paris, Hermann, 1960 (Act. scient. et ind., 1222 ; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 3).