Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Pierre Pigeaud

Sur les équations du mouvement en théorie de Jordan-Thiry

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 5 (1961-1962), exp. nº 2, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1961-1962__5__A2_0>

4 novembre 1961

SUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT EN TÉHORIE DE JORDAN-THIRY.

par Pierre PIGEAUD

1. Notations utilisées.

La théorie de JORDAN-THIRY est élaborée dans le cadre géométrique d'une variété de Riemann à cinq dimensions V_5 munie d'une structure de variété différentiable de classe C^2. La métrique riemannienne est supposée de type hyperbolique normal et définie par l'expression :

$$d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha\,,\ \beta = 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4) \quad .$$

La variété V_5 est supposée admettre un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales, à trajectoires Z orientées $d\sigma^2 < 0$. Ce groupe d'isométries induit une relation d'équivalence, la variété quotient V_4 sera munie de la métrique :

$$ds^2 = \left(\gamma_{ij} - \frac{\gamma_{oi}\,\gamma_{oj}}{\gamma_{oo}}\right) dx^i\, dx^j = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad (i\,,\ j = 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4) \quad .$$

Les composantes du tenseur fondamental de V_5 (et par suite celles du tenseur g_{ij}) sont déterminées par un système d'équations tensorielles généralisant formellement celui de la relativité, soit :

$$S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R\gamma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} \equiv r\, v_\alpha\, v_\beta$$

$R_{\alpha\beta}$ tenseur de Ricci de V_5.

Les conditions de conservation appliquées au tenseur énergétique $\theta_{\alpha\beta}$ montrent que la trajectoire pentadimensionnelle d'une masse d'épreuve est géodésique de la métrique de V_5, le principe de descente d'Yves THIRY permet de lui faire correspondre par projection sur V_4 une trajectoire quadridimensionnelle géodésique de la métrique finslérienne :

$$\sqrt{1 - \frac{h^2}{\gamma_{oo}}}\, ds + h\beta_0\, \varphi_i\, dx^i \quad .$$

Le caractère propre à la théorie de THIRY consiste à supposer (en opposition à la théorie de KALUZA KLEIN) le quinzième potentiel γ_{oo} variable. Posant $\gamma_{oo} = - \xi^2$, l'étude des équations tensorielles en repères orthonormés adaptés conduit à interpréter ξ^3 comme représentant un pouvoir diéléctrique variable de l'espace vide.

2. La métrique conforme de Mme HENNEQUIN.

Il est a priori naturel de désirer identifier dans la mesure du possible la variété quotient V_4 et l'espace temps de la Relativité générale.

Les calculs approchés successifs sont réalisés en égalant les développements du même ordre en $\frac{1}{c}$ (c = vitesse de la lumière) des deux membres des équations tensorielles. Les coordonnées utilisées sont adaptées au groupe d'isométries et constituent un système isotherme dans V_5 :

$$\Phi^\rho \equiv D_\lambda(\gamma^{\lambda\mu} \partial_\mu x^\rho) \equiv - \gamma^{\lambda\mu} \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_\alpha(\gamma^{\alpha\rho}\sqrt{\gamma}) = 0 \quad .$$

Un tel système de coordonnées permet de simplifier considérablement l'expression du tenseur $S_{\alpha\beta}$ soit $S^{(i)}_{\alpha\beta}$, les équations s'écrivent :

$$S^{(i)}_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} \quad .$$

Rappelons un résultat fondamental démontré par Mme HENNEQUIN :

Les équations du mouvement approchées d'ordre p entraînent la vérification des conditions d'isothermie au même ordre d'approximation.

La solution particulière trouvée est ainsi solution, moyennant un changement arbitraire des coordonnées, du problème initial.

Le calcul d'une première approximation des composantes g_{ij} montre cependant que cette identification est irréalisable, on obtient en effet :

$$\begin{cases} g_{AB} = - \delta^B_A + \frac{2}{c^2} \delta^B_A(\alpha_{oo} - U) + 0(\frac{1}{c^4}) \\ g_{44} = c^2 - 2U - 2\alpha_{oo} + 0(\frac{1}{c^2}) \end{cases}$$

avec

$$\xi = 1 + \frac{2}{c^2}\alpha_{oo} + O(\frac{1}{c^4}) \qquad \alpha_{oo} = \frac{U}{3} + \frac{Q}{6}$$

U étant le potentiel newtonnien, Q étant un potentiel relatif à une densité fictive e^2/m.

Les potentiels corrects sont obtenus à la seule condition d'effacer le terme α_{oo} ce qui revient à considérer les équations de la théorie provisoire puisqu'il faut également effacer la quinzième équation $S_{oo} = \theta_{oo}$.

Mme HENNEQUIN résoud la difficulté en envisageant de munir l'espace quotient d'une nouvelle métrique, dite métrique conforme, définie par la relation

$$ds^{*2} = \xi ds^2 \quad ,$$

les potentiels conformes g^{*}_{ij} possèdent en première approximation un développement correct.

L'interprétation en métrique conforme des équations tensorielles possède en outre des avantages annexes :

- Le coefficient de gravitation ne dépend plus du quinzième potentiel, il est maintenant constant et peut être identifié au coefficient classique.
- Les dix premières équations (i , j) ne font plus intervenir les dérivées secondes du quinzième potentiel.

L'étude des équations du mouvement montre cependant que des difficultés subsistent :

a. Le tenseur énergétique pentadimensionnel généralisant formellement le tenseur relativiste du schéma matière pure, le principe de descente conduit aux équations de mouvement exprimées sous forme variationnelle dans l'espace quotient :

$$\delta\{ \int \frac{1}{\sqrt{\xi}}\, ds^*\} = 0 \qquad \text{(Schéma non chargé)} \quad .$$

La variation étant envisagée dans V_4, la variable temporelle $x^4 = t$ n'étant pas variée, la partie principale de la fonction à rendre extrémale s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} V^2 + \frac{4}{3} U + O(\frac{1}{c^2}) \quad .$$

La présence du coefficient $\frac{4}{3}$ nous empêche de retrouver la fonction de Lagrange classique.

b. D'autre part, les équations de mouvement d'une particule chargée comportent le potentiel Q signalé précédemment ; ce terme, non interprété, est disproportionné aux autres termes classiques.

c. L'équation de continuité, interprétée en métrique conforme de V_4, conduit à affirmer la conservation le long des lignes de courant de la quantité

$$n = \frac{\chi_0 \, m^* \sqrt{\xi}}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{\xi^2}}} \quad , \qquad m^* = \rho \frac{dt}{ds^*} \sqrt{-g^*}$$

identique numériquement à la densité énergétique envisagée en relativité. En l'absence de charges $(h = 0)$ seule la quantité $m^* \sqrt{\xi}$ est conservative, il y a désacord avec le résultat relativiste.

Il est clair que l'objection (a) provient du fait que la projection sur V_4 de la trajectoire d'une masse d'épreuve non chargée (neutron) n'est pas géodésique de la métrique conforme ds^*, ainsi que l'indique la présence du terme $\frac{1}{\sqrt{\xi}}$. Le principe relativiste des géodésiques n'est donc pas vérifié dans l'espace quotient muni de sa métrique conforme.

La difficulté mise ainsi en évidence est capitale puisqu'il s'agit d'un désaccord relatif à des calculs effectués en première approximation.

Envisageons néanmoins le calcul en seconde approximation du potentiel conforme g^*_{44}. Le système de coordonnées étant adaptés et isotherme nous obtenons :

$$g^*_{44} = c^2 - 2\,U + \frac{2}{c^2}\,(U^2 - \zeta - Z) + 0\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

ζ est exactement le terme relativiste (gravitation pure).

U potentiel relatif à la densité énergique conforme.

Z, terme spécifique à la théorie unitaire, est un potentiel relatif à la densité d'énergie d'origine électromagnétique $E^2 + H^2$.

Le potentiel surabondant Q s'élimine au cours des calculs.

Cette coincidence en seconde approximation du potentiel g^*_{44} avec le potentiel relativiste correspondant montre l'efficacité de la notion de métrique conforme, elle semble prouver expérimentalement que l'espace quotient doué de la métrique conforme doit jouer le rôle de l'espace temps. Nous allons essayer de concilier cette exigence avec des équations du mouvement correctes en modifiant la structure du tenseur énergétique dans V_5.

3. Modification du tenseur énergétique pentadimensionnel.

Considérons un tenseur

$$\theta_{\alpha\beta} = r v_\alpha v_\beta - k\gamma_{\alpha\beta} \quad .$$

Supposons les scalaires r et k liés par une relation

$$r = f(k) \quad ,$$

le schéma ainsi décrit est pourvu d'un indice F dans V_5. Rappelons les résultats obtenus par R. VALLÉE : les lignes de courant géodésiques de V_5 (potentiels $\bar{\gamma}_{\alpha\beta} = F^2 \gamma_{\alpha\beta}$), satisfaisant à l'intégrale première $Fv_0 = h$, se projettent sur V_4 suivant les extrémales de

$$\int \sqrt{\varepsilon + \frac{h^2}{F^2 \xi^2}} \cdot \frac{F}{\sqrt{\xi}} ds^* + h\beta_0 \varphi_i dx^i \quad .$$

Examinons le cas non chargé $(h = 0)$ la fonction à rendre extrémale dans V_4 se réduit à

$$\int \frac{F}{\sqrt{\xi}} ds^* \quad .$$

Pour obtenir des trajectoires géodésiques de la métrique conforme il suffirait de pourvoir prendre $F = \sqrt{\xi}$, trois conditions s'imposent :

a. r et k doivent vérifier la relation $dk = \varepsilon r\, d(\mathrm{Log} \sqrt{\xi})$. ε est positif ou négatif suivant que le vecteur v engendrant les lignes de courant pentadimensionnelles est orienté $d\sigma^2 > 0$ ou < 0. Nous retiendrons seulement la première hypothèse, désirant étudier des schémas où le phénomène électromagnétique est supposé faible vis à vis de la gravitation.

b. k doit être d'ordre $\frac{1}{c^2}$ vis à vis de r, sa contribution dans le calcul d potentiels interviendra alors uniquement en seconde approximation.

c. Les conditions de raccordement exigent $k = 0$ sur les hypersurfaces séparant dans V_5 les distributions énergétiques (cas intérieur) et les domaines vides (cas extérieur).

Supposons l'existence d'une telle fonction k ; la relation $F = \sqrt{\xi}$ implique que les lignes de courant de V_5 sont géodésiques de la métrique conforme construite sur la variété riemannienne V_5 $(\gamma^*_{\alpha\beta} = \xi\gamma_{\alpha\beta})$. On obtient donc, dans le cas non chargé, l'application du principe de descente d'Yves THIRY entre les géodésiques des variétés riemanniennes V_5 et V_4 munies respectivement de leurs métriques conformes.

En présence de matière chargée la trajectoire quadrimensionnelle sera extrémale de l'intégrale

$$\int \sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^3}}\, ds^* + h\beta_0\, \varphi_i\, dx^i \quad .$$

Remarquons, dans le cas unitaire proprement dit, l'intervention simple du pouvoir diélectrique ξ^3.

L'équation de continuité associée au schéma s'écrit :

$$D_\alpha\left(\frac{r}{\sqrt{\xi}} v^\alpha\right) = 0$$

cette équation exprime la conservation le long des lignes de courant quadridimensionnelles de la quantité

$$n' = \frac{n}{\sqrt{\xi}} = \frac{r}{\sqrt{\xi}} v^4 \sqrt{\gamma} = \frac{\chi_0\, m^*}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^3}}}$$

la dernière difficulté disparaît : en l'absence de charges la densité énergétique conforme m^* est conservée le long des lignes de courant de V_4, nous retrouvons ainsi le résultat relativiste.

4. Interprétation des équations de mouvement dans les variétés V_5 et V_4 munies de leurs métriques conformes.

Les scalaires r et k étant reliés par la relation

$$dk = \varepsilon r \, d(\mathrm{Log} \sqrt{\xi})$$

un calcul simple permet d'évaluer les conditions de conservation relatives au tenseur $\theta_{\alpha\beta}$ en termes de métrique conforme, il vient :

$$D_\alpha(r v^\alpha v_\beta - k\gamma^\alpha_\beta) \equiv \xi^{5/2} D^*_\alpha(r\xi^{-5/2} v^{*\alpha} v^*_\beta)$$

D^*_α étant le symbole de dérivation covariante en métrique conforme de V_5

$$v^{*\alpha} = \xi^{-1/2} v^\alpha , \quad v^*_\alpha = \xi^{1/2} v_\alpha \quad .$$

Cette identité nous permet, lors de l'interprétation des équations de substituer au tenseur $\theta_{\alpha\beta}$ conservatif en métrique naturelle de V_5 un nouveau tenseur noté $X^*_{\alpha\beta}$ conservatif en métrique conforme.

$$X^*_{\alpha\beta} = r\xi^{-5/2} v^*_\alpha v^*_\beta \quad .$$

Les trois équations $D^*_\alpha(X^{*\alpha}_A) = 0$ peuvent s'écrire, après une transformation classique :

$$\frac{d}{dt} (X^{*4}_A \sqrt{\gamma^*}) = \frac{1}{2} \partial_A \gamma^*_{\alpha\beta} \cdot (X^{*\alpha\beta} \sqrt{\gamma^*}) \quad .$$

Nous constatons que seules les composantes de la densité tensorielle $X^*_{\alpha\beta} \sqrt{\gamma^*}$ interviennent effectivement dans les équations de mouvement proprement dites, explicitons ces composantes :

$$X^*_{oo} \sqrt{\gamma^*} = \frac{\chi_0 \, \rho \, h^2}{1 + \frac{h^2}{\xi^3}} \sqrt{- g^*} \quad ,$$

$$X^*_{oi} \sqrt{\gamma^*} = \frac{\chi_0 \, \rho \, h}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^3}}} u^*_i \sqrt{- g^*}$$

$$X^*_{ij} \sqrt{\gamma^*} = \chi_0 \, \rho \, u^*_i \, u^*_j \sqrt{- g^*} = \tau_{ij}$$

$\mathcal{T}_{ij}$ étant exactement la densité tensorielle envisagée en relativité. Envisageons l'hypothèse d'un schéma non chargé :

$$v^*_0 = v^{*0} = \gamma^*_{0i} = \gamma^{*0i} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\,(\mathcal{T}^4_A) = \frac{1}{2}\,\partial_A\, g^*_{ij} \times \mathcal{T}^{ij} \qquad .$$

Nous retrouvons, ainsi que le principe de descente le laissait prévoir, les équations relativistes exprimées en termes de métrique conforme de V_4 . Soulignons le fait qu'en définitive seule la densité tensorielle construite sur le tenseur $X^*_{\alpha\beta}$ est justifiable d'une interprétation classique (énergétique) dans V_4 . Cette remarque servira de point de départ lorsque l'on désirera construire un tenseur pentadimensionnel susceptible de décrire un schéma fluide.

5. Applications.

1° Le problème de Schwarzschild en théorie de JORDAN-THIRY.

Nous recherchons le champ créé par une sphère matérielle fixe composée de couches concentriques homogènes. L'hypothèse de la symétrie sphérique dans V_4 permet, compte tenu de la cylindricité, d'exprimer tout élément variable en fonction de ξ . Les conditions (a), (b), (c), seront satisfaites en prenant (schéma non chargé) :

$$r = \chi_0\, \rho\, \xi\,, \qquad k = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\chi_0\, \rho}{2}\, d\xi$$

ξ_0 étant la valeur constante prise par ξ sur la surface de la sphère.

Le principe des géodésiques se trouvant vérifié dans l'espace quotient doué de la métrique conforme, nous retrouvons les résultats classiques concernant les trajectoires d'une masse d'épreuve non chargée et en particulier l'expression de l'avance du périhélie ... etc.

2° Le problème des deux corps en théorie de JORDAN-THIRY.

L'étude du problème de Schwarzschild montre que ce problème peut être aisément résolu dans le cas particulier où l'un des corps peut être considéré comme infiniment petit par rapport à l'autre. En général il faudra rendre compte de deux distributions matérielles en présence, le tenseur énergétique envisagé lors de l'étude précédente apparait comme étant insuffisamment précis : en effet il ne permet pas d'effectuer le raccordement entre le champ extérieur et les champs intérieurs aux deux masses.

Nous sommes naturellement conduits à envisager un tenseur généralisant formellement dans V_5 le tenseur d'impulsion énergie d'un schéma fluide quelconque.

Utilisant comme système de coordonnées celui défini par les divers repères principaux, nous montrons qu'il est possible de déterminer un tel tenseur : cette détermination est effectuée avec le souci de ne perturber ni les équations de mouvement, ni le calcul en seconde approximation du potentiel conforme g^*_{44} ; il vient :

$$\theta_{\alpha\beta} = \chi_0 \; \rho \; \xi \; v_\alpha \; v_\beta - \left(\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\chi_0 \; \rho}{2} d\xi\right) \gamma_{\alpha\beta} - \sum_A \ell_A \; V_\alpha^{(A)} \; V_\beta^{(A)} \quad .$$

Nous appliquons les calculs effectués en seconde approximation à l'étude du problème des deux corps sous les hypothèses de LEVI-CIVITA. La seule différence apparaissant dans l'expression de la fonction lagrangienne résulte de la contribution du scalaire k (contribution de la seule partie correspondant à l'isotropie, en liaison avec le pouvoir diélectrique variable du vide). Il en résulte un simple changement de coefficient dans l'un des termes intervenant au second ordre : le principe d'effacement reste valable à l'approximation, la correction du déplacement du périhélie est donnée par :

$$\sigma = \sigma_E \left[1 + \frac{5}{9} \frac{M_1 \; M_2}{(M_1 + M_2)^2}\right]$$

M_1 , M_2 masses respectives des planètes, nous obtenons le coefficient $5/9$ au lieu du coefficient $1/3$ trouvé en relativité. La différence soit $2/9$ résulte de l'hypothèse d'un pouvoir diélectrique variable dans le vide ce scalaire étant relié à la pression de gravitation par la relation différentielle :

$$\rho d(\xi^3) = 2dp_G\left[1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right] \quad \text{(schéma non chargé)} \quad .$$

La correction de l'avance ne peut ainsi excéder $5/36$ (dans le cas de masses égales) de la valeur prévue par la solution du problème de Schwarzschild. Remarquons que cette modification est sans influence sensible sur l'avance du périhélie de Mercure, les masses en présence étant trop disproportionnées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HENNEQUIN (Françoise). - Étude mathématique des approximations en relativité générale et en théorie unitaire de Jordan-Thiry, Bull. scient. Commiss. Trav. hist. et scient., t. 1, 1956, 2e partie : Mathématiques, p. 73-154. - Paris, Gauthier-Villars, 1957 (Thèse Sc. math. Paris. 1956).

[2] LEVI CIVITA (Tullio). - Le problème des n corps en relativité générale. - Paris, Gauthier-Villars, 1950 (Mém. Sc. math., 116).

[3] LICHNEROWICZ (André). - Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. - Paris, Masson, 1955.

[4] THIRY (Yves). - Étude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ. J. Math. pures et appl., Série 9, t. 30, 1951, p. 275-396 (Thèse Sc. math. Paris. 1950).

[5] VALÉE (Robert). - Sur l'hydrodynamique en théories de Jordan-Thiry, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 1779-1781.