Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

ELIANE BLANCHETON

Les équations aux variations de la relativité générale

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 5 (1961-1962), exp. n° 3, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1961-1962__5__A3_0>

Séminaire JANET
(Mécanique analytique et Mécanique céleste)
5e année, 1961/62, n° 3

18 novembre 1961

LES ÉQUATIONS AUX VARIATIONS DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

par Mme Eliane BLANCHETON

La formation et les propriétés mathématiques des équations aux variations de la relativité générale ont été exposées l'an dernier par A. LICHNEROWICZ dans son cours du Collège de France. Nous allons ici rappeler brièvement celles de ces propriétés qui nous serons utiles. Nous donnerons ensuite une application de ces équations à l'étude d'un problème de mécanique céleste : l'existence de singularités des potentiels de gravitation à l'intérieur des tubes massiques.

1. Rappel de l'expression et des propriétés des équations aux variations de la relativité générale.

Supposons donnée une variété espace-temps V_4, de dimension 4, sur laquelle est définie une métrique

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \quad .$$

La variété et les coefficients $g_{\alpha\beta}$ sont supposés satisfaire aux postulats de la relativité générale.

Dans toute la suite, on désigne par ∇ l'opérateur de dérivation covariante relatif à la métrique $g_{\alpha\beta}$, et par Δ le laplacien au sens de A. LICHNEROWICZ. Dans les équations écrites, on élève et on abaisse toujours les indices à l'aide de la métrique $g_{\alpha\beta}$.

Soit $\underset{\sim}{h}$ une variation du tenseur métrique, de composantes

$$h_{\alpha\beta} = \delta g_{\alpha\beta} \quad .$$

On introduit le vecteur k défini par

$$(1) \qquad k_\alpha = \nabla_\lambda h^\lambda{}_\alpha - \frac{1}{2} \nabla_\alpha h_\lambda{}^\lambda \quad .$$

On désigne par $\mathfrak{L}k$ le tenseur obtenu par symétrisation de la dérivée covariante de k

$$(\wp k)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha k_\beta + \nabla_\beta k_\alpha \quad .$$

Enfin $R_{\alpha\beta}$ et $S_{\alpha\beta}$ désignent comme d'habitude les tenseurs de Ricci et d'Einstein associés à la métrique $g_{\alpha\beta}$. Ils sont liés par

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(R_{\alpha\beta} + \lambda) \quad ,$$

où λ est la constante cosmologique. On a, avec ces notations,

$$\delta(R_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} [(\Delta \underset{\sim}{h})_{\alpha\beta} + (\wp k)_{\alpha\beta}] \quad .$$

On associe au tenseur $\underset{\sim}{h}$ le tenseur $\underset{\sim}{f}$ défini par l'équation

(2)
$$f_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} h_\rho{}^\rho \quad .$$

Il vient alors

(3)
$$\delta(S_\alpha{}^\beta) = \frac{1}{2} [(\Delta \underset{\sim}{f})_\alpha{}^\beta - 2R_{\alpha\lambda} f^{\beta\lambda} + \delta_\alpha{}^\beta R_{\rho\lambda} f^{\rho\lambda} + (S_\alpha{}^\beta + \frac{1}{2} \lambda \delta_\alpha{}^\beta) f_\rho{}^\rho + (\wp k)_\alpha{}^\beta - \delta_\alpha{}^\beta \nabla_\lambda k^\lambda] \quad .$$

On sait que le vecteur k dépend des coordonnées choisies. En particulier, il est possible, par un changement de jauge gravitationnelle

$$\underset{\sim}{h} \rightarrow \underset{\sim}{h} + \wp A$$

(où A est un vecteur arbitraire), d'annuler k .

Nous supposons maintenant que la métrique donnée $g_{\alpha\beta}$ satisfait aux équations d'Einstein, qui s'écrivent, avec les notations usuelles

(4)
$$S_\alpha{}^\beta = \chi \, T_\alpha{}^\beta$$

où

(5)
$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta - p \, g_{\alpha\beta} \quad .$$

Dans un schéma fluide parfait, ρ et p sont liés par l'équation d'état

(6) $$\rho = \varphi(p) \quad .$$

Dans un shcéma matière pure

(6') $$p = 0 \quad .$$

Enfin, en l'absence de matière, $\rho = 0$ et $p = 0$, mais dans ce cas, u_α n'est pas défini au point correspondant.

A ces équations il faut joindre, le cas échéant, les équations de conservation

(7) $$\nabla_\lambda T_\alpha{}^\lambda = 0 \quad ,$$

et l'équation exprimant que le vecteur u_α est unitaire

(8) $$u_\alpha u^\alpha = 0 \quad .$$

Nous écrivons alors que le tenseur $\underset{\sim}{h}$ satisfait aux équations aux variations relatives à la solution $g_{\alpha\beta}$ donnée, déduites des équations (4), (5), (6) ou (6'), (7) et (8).

Nous désignons par ρ_1 et p_1 les variations ρ et p de la densité et de la pression partielle propres et, lorsque c'est utile, par v_α la variation δu_α de la composante covariante du vecteur vitesse unitaire. Les équations aux variations se présentent sous deux formes un peu différentes suivant les hypothèses faites sur la métrique donnée $g_{\alpha\beta}$.

<u>1er cas</u>. - $g_{\alpha\beta}$ est une solution des équations d'Einstein du cas extérieur : $\rho = 0$, $p = 0$. Le système des équations aux variations s'écrit alors

$$(E) \left\{ \begin{array}{ll} (9) & \delta(S_\alpha{}^\beta) = \chi(\rho_1 + p_1) u_\alpha u^\beta - p_1 \delta_\alpha{}^\beta \\ (10) & \rho_1 = p_1 \varphi'(0) \qquad (\text{ou } p_1 = 0) \\ (11) & (\rho_1 + p_1) u^\beta \nabla_\beta u_\alpha = (\delta_\alpha{}^\beta - u_\alpha u^\beta) \partial_\beta p_1 \\ (12) & \nabla_\alpha[(\rho_1 + p_1) u^\alpha] - u^\alpha \partial_\alpha p_1 = 0 \\ (13) & u_\alpha u^\alpha = 1 \end{array} \right.$$

où $\delta(S_\alpha{}^\beta)$ est donné par (3). Dans ce système, les inconnues sont les $h_{\alpha\beta}$ d'une part, ρ_1 , p_1 et u_α d'autre part.

<u>2e cas</u>. - $g_{\alpha\beta}$ est une solution des équations d'Einstein du cas intérieur. Le système des équations aux variations est complètement linéaire par rapport aux inconnues qui sont cette fois les $h_{\alpha\beta}$, ρ_1 , p_1 et v_α .

2. <u>Étude du problème de Cauchy. Position du problème</u>.

Étant données, sur une hypersurface S , les valeurs de p_1 , ρ_1 , u_α (resp. v_α) , $h_{\alpha\beta}$ et $\partial_\lambda h_{\alpha\beta}$, on se propose de déterminer ces mêmes inconnues dans un voisinage de S .

On constate d'abord que les quatre équations

$$\delta(S_\alpha{}^o) = \chi\delta(T_\alpha{}^o) \quad ,$$

ainsi que l'équation

$$u_\alpha u^\alpha = 1$$

(ou l'équation aux variations correspondante dans le 2e cas) ne font intervenir que les données de Cauchy, et constituent par suite un système de conditions que doivent vérifier les données de Cauchy pour que le problème soit possible.

Les données de Cauchy étant choisies, on montre alors qu'on peut choisir arbitrairement quatre fonctions k_α , astreintes seulement à vérifier la condition (1) sur S . Dès lors, le système constitué par les équations (9), où l'on a au préalable remplacé les k_α par les fonctions arbitraires choisies ci-dessus, et par les équations (10) (11) (12), admet en général une solution unique. On vérifie que (1) et (13), qu'on avait seulement supposées vérifiées sur S , le sont en fait dans un voisinage de S .

Il n'en n'est pas ainsi

1° Si l'hypersurface S est caractéristique pour la métrique $g_{\alpha\beta}$.

2° Si l'hypersurface S est engendrée par les lignes de courant, c'est-à-dire par les trajectoires du vecteur u_α .

3° Dans le cas d'un schéma fluide parfait, si S est un front d'onde hydrodynamique, c'est-à-dire si

$$(u^o)^2 + \varphi'(p)\,[g^{oo} - (u^o)^2] = 0 \quad .$$

L'étude du problème de Cauchy permet de résoudre les problèmes de prolongement local.

Rappelons les conditions de raccordement classiquement adcptées : chaque masse gravitante de V_4 engendre un tube d'univers limité par une hypersurface S. D'un côté de S, il existe une métrique satisfaisant aux équations d'Einstein du cas intérieur. De l'autre côté, il existe une métrique satisfaisant aux équations d'Einstein du cas extérieur. On impose à ces deux métriques la condition suivante, dite condition de raccordement :

Condition de raccordement. - Pour tout point x de S, il existe un système de coordonnées dont le domaine contient x, tel que les potentiels et leurs dérivées premières soient continus à la traversée de S.

Ici, nous supposerons donc les $g_{\alpha\beta}$ et les $f_{\alpha\beta}$ continues, ainsi que leurs dérivées premières, à la traversée de S.

Ceci étant rappelé, on se donne, dans une région R limitée à une hypersurface S un champ de tenseurs $\underset{\sim}{f}$ dont les composantes $f_{\alpha\beta}$ vérifient le système (E) avec $\rho_1 \neq 0$. On démontre alors qu'il existe un champ de tenseur $\underset{\sim}{f}'$, dont les composantes $f'_{\alpha\beta}$ vérifient le système (E) dans le cas extérieur et qui se raccorde avec le premier le long de S, à condition que S soit engendrée par les lignes de courant et que la pression s'y annule $(p = p_1 = 0)$. Dès qu'on s'est donné le champ de vecteurs arbitraires k à l'extérieur de S, la solution est unique.

Signalons, bien que ce résultat ne soit pas utilisé dans la suite de cet exposé, que les problèmes de prolongement vers l'intérieur conduisent à des problèmes de Cauchy mal posés qu'on ne peut donc résoudre.

3. Application au problème des singularités.

Nous supposerons désormais que la métrique donnée, de coefficients $g_{\alpha\beta}$, est stationnaire au sens donné par A. LICHNEROWICZ à ce mot : il existe un groupe connexe à un paramètre d'isométrie globales de V_4, à trajectoires z orientées dans le temps, ne laissant invariant aucun point de V_4, la famille des lignes z, ou lignes de temps, satisfaisant aux hypothèses suivantes :

a. Les lignes de temps sont isomorphes à R.

b. Il existe une variété V_3, de dimension 3, satisfaisant aux mêmes hypothèses de différentiabilité que V_4, telle qu'il existe un homéomorphisme différentiable de classe C_2, C_4 par morceaux, de la variété V_4 sur le produit topologique $V_3 \times R$, dans lequel les z s'appliquent sur les droites facteurs.

On démontre qu'il existe alors un système de coordonnées, dit adapté au caractère stationnaire, dans lequel

1° Les $g_{\alpha\beta}$ sont indépendants de x^0 ;

2° Le vecteur ξ, générateur infinitésimal du groupe d'isométries, admet pour carré

$$\xi^2 = g_{00} > 0 \qquad ;$$

3° Les x^i forment un système de coordonnées locales pour V_3 $(i = 1, 2, 3)$.

Nous désignerons enfin par W_3 la section locale d'équation $x_0 = \text{Cte}$. W_3 est homéomorphe à V_3, et les x^i forment un système de coordonnées locales pour W_3.

Le théorème de singularité repose sur le fait que, dans un système de coordonnées adapté au caractére stationnaire, la composante en repère naturel $\delta(S_0^0)$ de la variation du tenseur d'Einstein est, à un coeffidient multiplicatif près, une divergence exacte sur W_3, lorsque la métrique $g_{\alpha\beta}$ donnée est une solution des équations d'Einstein du cas extérieur.

On munit W_3 de la métrique dont les coefficients sont donnés par

$$\dot{g}_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}} \qquad .$$

On désigne par $\dot{\nabla}$ le symbole de dérivation covariante associé à cette métrique. On obtient alors

$$(14) \quad \delta(S_0^0) = -\frac{1}{2\xi} \dot{\nabla}_\ell A^\ell + \frac{1}{2} (S_0^0 - \frac{1}{2} S_\lambda^\lambda) f_\rho{}^\rho + \frac{1}{2} S_{\lambda\mu} f^{\lambda\mu} \qquad ,$$

où A^ℓ s'exprime uniquement à partir de $f_{\alpha\beta}$ et de ses dérivées premières.

Supposons maintenant la métrique $g_{\alpha\beta}$ donnée solution, dans un domaine D des équations d'Einstein du cas extérieur. Dans ce domaine, on a alors

$$S_{\alpha\beta} = 0$$

et

(15) $$\delta(S_o^o) = -\frac{1}{2\xi}\dot{\nabla}_\ell A^\ell \quad .$$

On pose

$$\delta(T_\alpha{}^\beta) = E_\alpha{}^\beta \quad .$$

L'équation

$$\delta(S_\alpha{}^\beta) = \chi E_\alpha{}^\beta$$

entraine alors

(16) $$\dot{\nabla}_\ell A^\ell = -2\xi\,\chi E_o^o \quad .$$

Soit $\mathcal{C}$ une chaine différentiable de W_3 contenue dans D. Par intégration de (16) sur $\mathcal{C}$, il vient, en désignant par $\delta\mathcal{C}$ le bord de $\mathcal{C}$, par A le vecteur de composantes A^ℓ, et par **vol** l'élément de volume de W_3

(17) $$\dot{\text{flux}}_{\partial\mathcal{C}}\, A = -2\chi \int_{\mathcal{C}} \xi E_o^o \text{ vol} \quad .$$

On remarque que, en l'absence de matière $E_o^o = 0$.

Dans un schéma matière pure ou fluide parfait,

$$E_o^o = (\rho_1 + p_1)u_o\, u^o - p_1 \quad .$$

On montre facilement que, si $\rho_1 \neq 0$, E_o^o est strictement positif.

<u>Démonstration du théorème de singularité</u>. – Considérons maintenant un tube d'univers de V_4, limité par une hypersurface S engendrée par les lignes de temps. Supposons la section W_3 partout orientée dans l'espace. Supposons aussi le tube d'univers intérieur au domaine D.

On considère une solution $\underset{\sim}{f}$ satisfaisant à l'intérieur de S aux équations (E) du cas intérieur $(\rho_1 \neq 0)$. Dans le voisinage de S, cette solution induit un champ $\underset{\sim}{f}'$, physiquement unique, dont les composantes satisfont à l'équation

(9) du cas extérieur. Sur S , $\underset{\sim}{f}$ et $\underset{\sim}{f}'$, ainsi que leurs dérivées premières coïncident, conformément aux conditions de raccordement ; par conséquent, les deux champs de vecteurs A et A' associés respectivement aux tenseurs $\underset{\sim}{f}$ et $\underset{\sim}{f}'$ coïncident sur S .

Supposons que $\underset{\sim}{f}'$ puisse être prolongé régulièrement à tout l'intérieur de S . La section W_3 détermine sur S un domaine à deux dimensions D_1 . Nous appliquerons la formule (17) successivement au champ $\underset{\sim}{f}$ et au prolongement supposé régulier du champ $\underset{\sim}{f}'$, en prenant pour $\mathcal{C}$ le domaine de W_3 intérieur à D_1 . Pour le champ $\underset{\sim}{f}$,

$$\dot{\text{flux}}_{D_1} A = -2\chi \int_{\mathcal{C}} \xi E_o^o \text{ vol}$$

est structement négatif . Pour le prolongement, supposé régulier, du champ $\underset{\sim}{f}'$, E_o^o étant nul sur C , on aurait

$$\dot{\text{flux}}_{D_1} A' = 0 \quad .$$

Ces deux résultats sont contradictoires. D'où le

THÉORÈME 1. – Étant donné, à l'intérieur et au voisinage d'un tube d'univers limité par une hypersurface S engendrée par les lignes de temps, un champ de gravitation stationnaire extérieur, défini par la métrique

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \quad ,$$

et, à l'intérieur de S , un deuxième champ de gravitation, intérieur, défini par la métrique

$$\overline{ds^2} = \overline{g_{\alpha\beta}}\, dx^\alpha\, dx^\beta \quad ,$$

où

(18) $$\overline{g_{\alpha\beta}} = g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad ,$$

les $h_{\alpha\beta}$ étant supposés petits, ainsi que leurs dérivées, par rapport aux $g_{\alpha\beta}$, de telle sorte que les termes du second ordre par rapport aux $h_{\alpha\beta}$ ou à leurs dérivées, puissent être négligés. Le champ de gravitation extérieur, se raccordant avec ce dernier le long de S , ne peut être prolongé régulièrement à tout l'intérieur de S .

<u>Définition.</u> — Nous dirons qu'un champ de gravitation est quasi stationnaire si les coefficients $\overline{g_{\alpha\beta}}$ de la métrique qui le définit peuvent se mettre sous la forme (18), où les $h_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées sont petits au sens donné plus haut à ce mot.

On peut réunir ce résultat et un résultat analogue démontré par A. LICHNEROWICZ sur les univers stationnaires en un seul théorème. A. LICHNEROWICZ, a démontré en effet que, si une métrique stationnaire $g_{\alpha\beta}$ satisfait aux équations d'Einstein du cas intérieur à l'intérieur de l'hypersurface S précédente et aux équations d'Einstein du cas extérieur à l'extérieur de S , les deux solutions se raccordant sur S , la solution extérieure ne peut être prolongée régulièrement à tout l'intérieur de S . On en déduit le

THÉORÈME II. — Étant donné un champ de gravitation intérieur quasi stationnaire, limité à une hypersurface S engendrée par les lignes de temps, le champ de gravitation extérieur se raccordant avec lui sur S ne peut être prolongé régulièrement à tout l'intérieur de S .

Ce théorème se généralise sans aucune difficulté à la théorie Jordan-Thiry.

THÉORÈME III. — Étant donné un champ unitaire intérieur quasi stationnaire limité à une hypersurface S engendrée par les lignes de temps, le champ unitaire extérieur se raccordant avec lui ne peut être prolongé régulièrement à tout l'intérieur de S .

<u>Autre application de la formule de divergence aux univers admettant une section d'espace compacte orientable.</u> — Considérons un espace temps V_4 admettant une section d'espace W_3 compacte, orientable. Nous dirons que cet espace temps définit un modèle d'univers si sa métrique satisfait aux équations d'Einstein des cas extérieur ou intérieur, avec raccordement le long d'hypersurfaces S engendrées par les lignes de temps. La constante cosmologique est supposée non nulle.

Supposons donné, dans V_4 , un modèle d'univers stationnaire extérieur (par exemple le modèle de Sitter), et supposons qu'il existe un modèle d'univers quasi-stationnaire associé au précédent. On applique (17) en prenant pour chaine différentiable C la section W_3

Il vient

$$\int_{W_3} \xi E_0^0 \,\mathrm{vol} = 0 \quad .$$

où E_o^o est strictement positif dans certaines régions de W_3 , nul sur le complémentaire. On a donc le

THÉORÈME IV. - Il ne peut exister de modèle d'univers quasi-stationnaire associé à un modèle d'univers stationnaire extérieur, à section d'espace compacte orientable, à moins qu'il ne soit lui-même partout extérieur.

Autrement dit : on ne peut introduire continuement de la matière dans un univers vide défini par une métrique stationnaire, à section d'espace compacte orientable.