D. BOHM
G. LOCHAK
J. P. VIGIER

Expression des paramètres relativistes de Cayley-Klein en fonction des angles d'Euler

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 25 (1955-1956), exp. n° 8 bis, p. 11-18
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1955-1956__25__A7_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de THÉORIES PHYSIQUES
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1955/1956
-:-:-:-

ANNEXE à L'EXPOSÉ 8

Expression des paramètres relativistes de Cayley-Klein en fonction des angles d'Euler.

1.- Matrices de rotation dans l'espace-temps :

Soient les matrices décrivant les rotations autour des plans de coordonnées de l'espace-temps.

A	rotation	de	l'angle	α	autour	de	y0z.
B	"	"	"	β	"	"	y0t
C	"	"	"	γ	"	"	z0t
D	"	"	"	ψ	"	"	x0t
E	"	"	"	χ	"	"	x0z
F	"	"	"	θ	"	"	x0y
G	"	"	"	φ	"	"	x0t

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & 0 & 0 & -\operatorname{sh}\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sh}\alpha & 0 & 0 & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\beta & 0 & -\operatorname{sh}\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\beta & 0 & \operatorname{ch}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\gamma & -\operatorname{sh}\gamma & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\gamma & \operatorname{ch}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\chi & 0 & -\sin\chi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\chi & 0 & \cos\chi \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La rotation générale de l'axe des temps s'écrira $\Omega_L = ABC$: c'est la transformation de Lorentz sans rotation des axes d'espace.

La rotation des axes d'espace s'écrira de deux façons :

a) Ω_R = DEF : rotations successives autour des axes d'espace.
b) Ω_E = DFG : rotation suivant les angles d'Euler.

La rotation générale s'écrira donc :

soit : $\Omega = \Omega_L . \Omega_R$ = ABCDEF
soit : $\Omega = \Omega_L . \Omega_E$ = ABCDFG

2.- Expression des rotations en fonction des paramètres de Cayley-Klein :

Résumons brièvement la théorie des spineurs.

On considère dans un espace A_4 affine, complexe à quatre dimensions, deux plans A_2 et $A_{\hat{2}}$ à deux dimensions et ayant un seul point commun.

Soient les repères affines tels que deux des vecteurs de base soient dans A_2 et les deux autres dans $A_{\hat{2}}$, et considérons les transformations unimodulaires définies par :

$$e_{\lambda'} = \alpha^{\lambda}_{\lambda'}\, e_{\lambda} \qquad \lambda = 1\ ,\ 2$$

$$e_{\hat{\mu}'} = \alpha^{\hat{\mu}}_{\hat{\mu}'}\, e_{\hat{\mu}} \qquad \hat{\mu} = 1\ ,\ 2$$

avec $\quad \mathrm{Det}\, \| \alpha^{\lambda}_{\lambda'} \| = \mathrm{Det}\, \| \alpha^{\hat{\mu}}_{\hat{\mu}'} \| = 1$

On introduit le spin-tenseur de second rang $c^{\lambda\hat{\mu}}$, tel que :

$$c^{\lambda\mu} = c^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} = 0 \quad , \quad c^{\lambda\hat{\mu}} = c$$

cette définition est invariante avec la loi de transformation :

$$c^{\lambda'\hat{\mu}'} = \alpha^{\lambda'}_{\lambda}\alpha^{\hat{\mu}'}_{\hat{\mu}}\, c^{\lambda\hat{\mu}}$$

On pose alors :

$$c^{\lambda\hat{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^{1\hat{1}} & c^{1\hat{2}} \\ 0 & 0 & c^{2\hat{1}} & c^{2\hat{2}} \\ c^{\hat{1}1} & c^{\hat{1}2} & 0 & 0 \\ c^{\hat{2}1} & c^{\hat{2}2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^3 - x^0 & x^1 - ix^2 \\ 0 & 0 & x^1 + ix^2 & -x^3 - x^0 \\ x^3 - x^0 & x^1 + ix^2 & 0 & 0 \\ x^1 - ix^2 & -x^3 - x^0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x^0, x^1, x^2, x^3 étant les composantes contravariantes d'un vecteur de l'espace temps.
Les transformations étant unimodulaires, on vérifie que :

$$c^{1\hat{1}}\, c^{2\hat{2}} - c^{1\hat{2}}\, c^{2\hat{1}} = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

est invariant, ce qui montre la correspondance entre les transformations spinarielles et le groupe des rotations.

De plus, on a :

$$c^{\lambda\hat{\mu}} = \overline{(c^{\hat{\mu}\lambda})}\text{, ce qui entraine :}$$

$$\alpha^{\hat{\lambda}'}_{\hat{\lambda}} = \overline{\alpha^{\lambda'}_{\lambda}}$$

Les transformations spinorielles s'écriront alors, sur les composantes contravariantes d'un spineur Ψ :

$$\Psi^{1'} = k\,\Psi^1 + \ell\,\Psi^2 \qquad \Psi^{\hat{1}'} = \bar{k}\,\Psi^{\hat{1}} + \bar{\ell}\,\Psi^{\hat{2}}$$
$$\Psi^{2'} = m\,\Psi^1 + n\,\Psi^2 \qquad \Psi^{\hat{2}'} = \bar{m}\,\Psi^{\hat{1}} + \bar{n}\,\Psi^{\hat{2}}$$

les composantes covariantes seront

$$\Psi_1\,,\ \Psi_2\,,\ \Psi_{\hat{1}}\,,\ \Psi_{\hat{2}} = \Psi^2\,,\ -\Psi^1\,,\ \Psi^{\hat{2}}\,,\ -\Psi^{\hat{1}}$$

et on a toujours la condition :

$$\begin{vmatrix} k & \ell \\ m & n \end{vmatrix} = 1$$

k , ℓ , m , n sont les paramètres de Cayley-Klein.

La transformation $c^{\lambda'\hat{\mu}'} = \alpha^{\lambda'}_{\lambda}\,\alpha^{\hat{\mu}'}_{\hat{\mu}}\,c^{\lambda\hat{\mu}}$ s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} x^{3'} - x^{0'} & x^{1'} - ix^{2'} \\ x^{1'} + ix^{2'} & -x^{3'} - x^{0'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & \ell \\ m & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^3 - x^0 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 - x^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{k} & \bar{m} \\ \bar{\ell} & \bar{n} \end{pmatrix}$$

d'où l'on tire

$$2x^{0'} = x^0(k\bar{k}+\ell\bar{\ell}+m\bar{m}+n\bar{n})+x^1(-\bar{k}\ell-k\bar{\ell}-m\bar{n}-\bar{m}n)+ix^2(k\bar{\ell}-\bar{k}\ell+m\bar{n}-\bar{m}n)+x^3(-k\bar{k}+\ell\bar{\ell}-m\bar{m}+n\bar{n})$$

$$2x^{1'} = x^0(-k\bar{m}-\bar{k}m-\ell\bar{n}-\bar{\ell}n)+x^1(k\bar{n}+\bar{k}n+\ell\bar{m}+\bar{\ell}m)+ix^2(\bar{k}n-k\bar{n}+\ell\bar{m}-\bar{\ell}m)+x^3(k\bar{m}+\bar{k}m-\ell\bar{n}-\bar{\ell}n)$$

$$2x^{2'} = x^0(k\bar{m}-\bar{k}m+\ell\bar{n}-\bar{\ell}n)+x^1(\bar{k}n-k\bar{n}+\bar{\ell}m-\ell\bar{m})+ix^2(k\bar{n}+\bar{k}n-\ell\bar{m}-\bar{\ell}m)+x^3(\bar{k}m-k\bar{m}+\ell\bar{n}-\bar{\ell}n)$$

$$2x^{3'} = x^0(-k\bar{k}-\ell\bar{\ell}+m\bar{m}+n\bar{n})+x^1(\bar{k}\ell+k\bar{\ell}-m\bar{n}-\bar{m}n)+ix^2(\bar{k}\ell-k\bar{\ell}+m\bar{n}-\bar{m}n)+x^3(k\bar{k}-\ell\bar{\ell}-m\bar{m}+n\bar{n})$$

3.- Calcul des Paramètres de Cayley-Klein en fonction des angles.

Nous allons calculer les paramètres correspondants à la rotation d'angle θ autour de xOt . On a à résoudre le système de 17 équations

$$(0) : \quad kn - \ell m = 1$$

$$\left\{\begin{array}{lll}
(1) & \bar{k}\ell + k\bar{\ell} + \bar{m}n + m\bar{n} & = 0 \\
(2) & \bar{k}\ell - k\bar{\ell} + \bar{m}n - m\bar{n} & = 0 \\
(3) & -k\bar{k} - m\bar{m} + \ell\bar{\ell} + n\bar{n} & = 0 \\
(4) & k\bar{m} + \bar{k}m + \ell\bar{n} + \bar{\ell}n & = 0 \\
(5) & \ell\bar{m} - \bar{\ell}m + \bar{k}n - k\bar{n} & = 0 \\
(6) & k\bar{m} + \bar{k}m - \ell\bar{n} - \bar{\ell}n & = 0 \\
(7) & k\bar{m} - \bar{k}m + \ell\bar{n} - \bar{\ell}n & = 0 \\
(8) & -\ell\bar{m} + \bar{\ell}m - k\bar{n} + \bar{k}n & = 0
\end{array}\right.
\qquad
\left\{\begin{array}{lll}
(9) & k\bar{k} - m\bar{m} + \ell\bar{\ell} - n\bar{n} & = 0 \\
(10) & \bar{k}\ell + k\bar{\ell} - \bar{m}n - m\bar{n} & = 0 \\
(11) & k\bar{k} + \ell\bar{\ell} + m\bar{m} + n\bar{n} & = 2 \\
(12) & \ell\bar{m} + m\bar{\ell} + \bar{k}n + k\bar{n} & = 2 \\
(13) & k\bar{n} + \bar{k}n - \ell\bar{m} - \bar{\ell}m & = 2\cos\theta \\
(14) & \bar{k}m - k\bar{m} + \ell\bar{n} - \bar{\ell}n & = 2\,i\sin\theta \\
(15) & \bar{k}\ell - k\bar{\ell} + m\bar{n} - \bar{m}n & = 2\,i\sin\theta \\
(16) & k\bar{k} - \ell\bar{\ell} - m\bar{m} + n\bar{n} & = 2\cos\theta
\end{array}\right.$$

On a alors :

$$\begin{cases} (11)+(16) : (a) \quad k\bar{k}+n\bar{n}=2\cos^2\frac{\theta}{2} \\ (11)-(16) : (a') \quad \ell\bar{\ell}+m\bar{m}=2\sin^2\frac{\theta}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} (3)+(9) : (b): \quad \ell\bar{\ell}-m\bar{m}=0 \\ (3)-(9) : (b'): \quad -k\bar{k}+n\bar{n}=0 \end{cases}$$

d'où

$$\mathrm{I} \begin{cases} k\bar{k}=n\bar{n}=\cos^2\frac{\theta}{2} \\ \ell\bar{\ell}=n\bar{n}=\sin^2\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

Par ailleurs

$$\begin{cases} (12)+(13) : (c) \quad k\bar{n}+\bar{k}n=2\cos^2\frac{\theta}{2} \\ (12)-(13) : (c') \quad \ell\bar{m}+\bar{\ell}m=2\sin^2\frac{\theta}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} (5)+(8) : (d) \quad : \bar{k}n-k\bar{n}=0 \\ (5)-(8) : (d') \quad : \ell\bar{m}-\bar{\ell}m=0 \end{cases}$$

d'où

$$\mathrm{II} \begin{cases} k\bar{n}=\bar{k}n=\cos^2\frac{\theta}{2} \\ \ell\bar{m}=\bar{\ell}m=\sin^2\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

En comparant I et II il vient $\underline{k=n \text{ et } \ell=m}$.

La relation (0) devient alors

$$k^2-\ell^2=1 \qquad (0')$$

D'autre part,

$(1)+(2)$: $\bar{k}\ell+\bar{m}n=0$ et $(2)+(10)$: $\bar{k}\ell-m\bar{n}=0$.

d'où $\bar{m}n+m\bar{n}=0 \quad (\alpha)$ et $\bar{k}\ell+k\bar{\ell}=0 \quad (\beta)$

Multiplions (β) par k : $k\bar{k}\ell+k^2\bar{\ell}=0$. Soit d'après $(0')$

$\ell\cos^2\frac{\theta}{2}+\bar{\ell}(1+\ell^2)=0$ donc $\ell\cos^2\frac{\theta}{2}+\bar{\ell}+\ell\sin^2\frac{\theta}{2}=0$,

donc : $\ell+\bar{\ell}=0$,

d'où $\underline{\ell=m=\pm i\sin\frac{\theta}{2}}$ ce qui donne $\underline{k=\pm\cos\frac{\theta}{2}}$.

Or si $\theta=0$ on doit retrouver la matrice unité, d'où $\underline{k=n=\cos\frac{\theta}{2}}$.

Pour avoir le signe de ℓ , on porte $\ell=m=\varepsilon\, i\sin\frac{\theta}{2}$ dans (14) par exemple.

Il vient après simplification, $2i\varepsilon\sin\theta=2i\sin\theta$.

donc $\underline{\ell=m=i\sin\frac{\theta}{2}}$.

Des calculs analogues nous conduiraient à l'expression des autres matrices de rotation. On trouve les sept matrices :

$$a=\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\frac{\alpha}{2} & \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2} \\ \mathrm{sh}\frac{\alpha}{2} & \mathrm{ch}\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}=\exp(\sigma_1'\tfrac{\alpha}{2}) \qquad b=\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\frac{\beta}{2} & -i\,\mathrm{sh}\frac{\beta}{2} \\ i\,\mathrm{sh}\frac{\beta}{2} & \mathrm{ch}\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}=\exp(\sigma_2'\tfrac{\beta}{2})$$

$$c = \begin{pmatrix} e^{\chi/2} & 0 \\ 0 & e^{-\chi/2} \end{pmatrix} = \exp(\sigma_3' \tfrac{\chi}{2}) \qquad d = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} = \exp(i\sigma_3' \tfrac{\psi}{2})$$

$$e = \begin{pmatrix} \cos\frac{\chi}{2} & \sin\frac{\chi}{2} \\ -\sin\frac{\chi}{2} & \cos\frac{\chi}{2} \end{pmatrix} = \exp(i\sigma_2' \tfrac{\chi}{2}) \qquad f = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \exp(i\sigma_1' \tfrac{\theta}{2})$$

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} = \exp(i\sigma_3' \tfrac{\psi}{2})$$

où σ_1', σ_2', σ_3' sont les matrices de Pauli

4.- L'équation de Dirac.

On introduit le spin-tenseur contravariant.

$$D^{\lambda\hat\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^0} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^0} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarquera que l'invariant de ce spineur est le dalembertien.

Considérons maintenant le spineur $\tilde\psi^{\lambda} = D^{\lambda\hat\mu}\,\psi_{\hat\mu}$. En imposant que $\tilde\psi^{\lambda} = \frac{mc}{\hbar}\psi^{\lambda}$ on a l'équation de Dirac :

$$\left\{\begin{aligned}
\tilde\psi^1 &= \frac{\partial\psi_{\hat 1}}{\partial x^3} + \frac{\partial\psi_{\hat 1}}{\partial x^0} + \frac{\partial\psi_{\hat 2}}{\partial x^1} - i\frac{\partial\psi_{\hat 2}}{\partial x^2} = -\frac{mc}{\hbar}\psi_2 \\
\tilde\psi^2 &= \frac{\partial\psi_{\hat 1}}{\partial x^1} + i\frac{\partial\psi_{\hat 1}}{\partial x^0} - \frac{\partial\psi_{\hat 2}}{\partial x^3} + \frac{\partial\psi_{\hat 2}}{\partial x^0} = \frac{mc}{\hbar}\psi_1 \\
\tilde\psi^3 &= \frac{\partial\psi_1}{\partial x^3} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x^0} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x^1} + i\frac{\partial\psi_2}{\partial x^2} = -\frac{mc}{\hbar}\psi_{\hat 2} \\
\tilde\psi^4 &= \frac{\partial\psi_1}{\partial x^1} - i\frac{\partial\psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x^3} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x^0} = -\frac{mc}{\hbar}\psi_{\hat 1}
\end{aligned}\right.$$

Introduisons le spineur défini par :

$$\varphi_1 = \tfrac{1}{2}\,(i\Psi_{\hat{2}} - \Psi_1)$$
$$\varphi_2 = -\tfrac{1}{2}\,(\Psi_2 + i\Psi_{\hat{1}})$$
$$\varphi_3 = \tfrac{1}{2}\,(\Psi_1 + i\Psi_{\hat{2}})$$
$$\varphi_4 = \tfrac{1}{2}\,(\Psi_2 - i\Psi_{\hat{1}})$$

Les équations s'écrivent alors :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{c}\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} &= \Big(\frac{\partial}{\partial x^1} + i\,\frac{\partial}{\partial x^2}\Big)\varphi_4 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x^3} - i\,\frac{mc}{\hbar}\,\varphi_1\\
\frac{1}{c}\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} &= \Big(\frac{\partial}{\partial x^1} - i\,\frac{\partial}{\partial x^2}\Big)\varphi_3 - \frac{\partial\varphi_4}{\partial x^3} - i\,\frac{mc}{\hbar}\,\varphi_2\\
\frac{1}{c}\,\frac{\partial\varphi_3}{\partial t} &= \Big(\frac{\partial}{\partial x^1} + i\,\frac{\partial}{\partial x^2}\Big)\varphi_2 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x^3} + i\,\frac{mc}{\hbar}\,\varphi_3\\
\frac{1}{c}\,\frac{\partial\varphi_4}{\partial t} &= \Big(\frac{\partial}{\partial x^1} - i\,\frac{\partial}{\partial x^2}\Big)\varphi_1 - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x^3} + i\,\frac{mc}{\hbar}\,\varphi_4
\end{aligned}\right.$$

5.- <u>Calcul de la transformation linéaire du spineur de Dirac en fonction des paramètres de Cayley-Klein.</u>

On a

$$\left\{\begin{aligned}
\Psi_1 &= \varphi_3 - \varphi_1\\
\Psi_2 &= \varphi_4 - \varphi_2\\
\Psi_{\hat{1}} &= i(\varphi_4 + \varphi_2)\\
\Psi_{\hat{2}} &= i(\varphi_1 + \varphi_3)
\end{aligned}\right.$$

On a

$$\left\{\begin{aligned}
\Psi_{1'} &= n\,\Psi_1 - m\,\Psi_2 = n(\varphi_3 - \varphi_1) - m(\varphi_4 - \varphi_2) = \varphi_{3'} - \varphi_{1'}\\
\Psi_{2'} &= -\ell\,\Psi_1 + k\,\Psi_2 = -\ell(\varphi_3 - \varphi_1) + k(\varphi_4 - \varphi_2) = \varphi_{4'} - \varphi_{2'}\\
\Psi_{\hat{1}'} &= \bar{n}\,\Psi_{\hat{1}} - \bar{m}\,\Psi_2 = \bar{n}i(\varphi_2 + \varphi_4) - \bar{m}i(\varphi_1 + \varphi_3) = i(\varphi_{2'} + \varphi_{4'})\\
\Psi_{\hat{2}'} &= -\bar{\ell}\,\Psi_{\hat{1}} + \bar{k}\,\Psi_{\hat{2}} = -\bar{\ell}i(\varphi_2 + \varphi_4) - \bar{k}i(\varphi_1 + \varphi_3) = i(\varphi_{1'} + \varphi_{3'})
\end{aligned}\right.$$

On voit alors aisément que les φ se transforment par la matrice

$$\Lambda = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}
\bar{k} + n & \bar{\ell} - m & \bar{k} - n & \bar{\ell} + m\\
-\ell + \bar{m} & k + \bar{n} & \ell + \bar{m} & -k + \bar{n}\\
\bar{k} - n & \bar{\ell} + m & \bar{k} + n & \bar{\ell} - m\\
\ell + \bar{m} & -k + \bar{n} & -\ell + \bar{m} & k + \bar{n}
\end{pmatrix}$$

Les matrices a , b , c , d , e , f , g nous donnent les expressions de k , ℓ , m , n en fonction des angles de rotation. On en tire alors les expressions de .

Si on pose :

γ_i = rotation du i-ième axe d'espace vers le temps.

α_i = matrice-courant de Dirac.

θ_j = rotation d'espace autour du i-ième axe.

σ_j = matrice-spin de Dirac.

On trouve pour une transformation simple de Lorentz :

$$\Lambda_i = \exp(\alpha_i \frac{\gamma_i}{2})$$

et pour une rotation d'espace :

$$\Lambda_j = \exp(- i \sigma_j \frac{\theta_j}{2})$$

D'où la transformation générale :

$$\Lambda = \prod_{i=1}^{3} \exp(\alpha_i \frac{\gamma_i}{2}) \cdot \prod_{j=1}^{3} \exp(- i \sigma_j \frac{\theta_j}{2})$$

Si la transformation est infinitésimale, on retrouve l'expression connue :

$$\ell = 1 + \vec{\alpha} \cdot \frac{\overrightarrow{\delta\gamma}}{2} - i \vec{\sigma} \cdot \frac{\overrightarrow{\delta\theta}}{2}$$

<u>Calcul des paramètres de Cayley-Klein dans le cas de la rotation générale.</u>

On considère la rotation d'Euler la plus générale

Soit ω_i = abc et $\omega_{\bar{i}}$ = dfg . On a alors $L = \omega_i \cdot \omega_{\bar{i}} = \begin{pmatrix} k & \ell \\ m & n \end{pmatrix}$

d'où

$$L = \begin{pmatrix} k & \ell \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{\alpha}{2} & sh\frac{\alpha}{2} \\ sh\frac{\alpha}{2} & ch\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch\frac{\beta}{2} & -ish\frac{\beta}{2} \\ ish\frac{\beta}{2} & ch\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

d'où en identifiant

$$\begin{cases} k = \exp[\frac{\gamma}{2}+i\frac{\psi+\varphi}{2}] \cos\frac{\theta}{2}(ch\frac{\alpha}{2}\, ch\frac{\beta}{2} +i\, sh\frac{\alpha}{2}\, sh\frac{\beta}{2}) + i\exp-[\frac{\gamma}{2}+\frac{\psi-\varphi}{2}] \sin\frac{\theta}{2}(sh\frac{\alpha}{2}\, ch\frac{\beta}{2} -i\, sh\frac{\beta}{2}\, ch\frac{\alpha}{2}) \\ \ell = i\exp[\frac{\gamma}{2}+i\frac{\psi-\varphi}{2}] \sin\frac{\theta}{2}(ch\frac{\alpha}{2}\, ch\frac{\beta}{2} +i\, sh\frac{\alpha}{2}\, sh\frac{\beta}{2}) + \exp-[\frac{\gamma}{2}+\frac{\psi+\psi}{2}] \cos\frac{\theta}{2}(sh\frac{\alpha}{2}\, ch\frac{\beta}{2} -i\, sh\frac{\beta}{2}\, ch\frac{\alpha}{2}) \\ m = \exp[\frac{\gamma}{2}+i\frac{\psi+\varphi}{2}] \cos\frac{\theta}{2}(ch\frac{\beta}{2}\, sh\frac{\alpha}{2} +i\, sh\frac{\beta}{2}\, ch\frac{\alpha}{2}) + i\exp[-\frac{\gamma}{2}-i\frac{\psi-\psi}{2}] \sin\frac{\theta}{2}(ch\frac{\alpha}{2}\, ch\frac{\beta}{2} -i\, sh\frac{\alpha}{2}\, sh\frac{\beta}{2}) \\ n = i\exp[\frac{\gamma}{2}+i\frac{\psi-\varphi}{2}] \sin\frac{\theta}{2}(ch\frac{\beta}{2}\, sh\frac{\alpha}{2} +i\, sh\frac{\beta}{2}\, ch\frac{\alpha}{2}) + \exp-[\frac{\gamma}{2}+i\frac{\psi-\varphi}{2}] \cos\frac{\theta}{2}(ch\frac{\alpha}{2}\, ch\frac{\beta}{2} -i\, sh\frac{\alpha}{2}\, sh\frac{\beta}{2}) \end{cases}$$

<u>Plaçons nous dans le système propre</u>

Nous pouvons supposer que

$\Psi_1 = 0$ et que $\hat{\Psi}_2 = 0$ d'où $\varphi_1 = 0$ $\varphi_2 = a$ $\varphi_3 = 0$ $\varphi_4 = b$.

On a alors les invariants $\begin{cases} \Omega_1 = \varphi^* \alpha_4 \varphi = a\bar{a} - b\bar{b} \\ \Omega_2 = \varphi^* \alpha_5 \varphi = i(\bar{a}b - a\bar{b}) \end{cases}$

On peut poser, le spineur étant défini à un facteur multiplicatif près : $\Omega_1 = \cos A$ et $\Omega_2 = \sin A$. On trouve alors les deux solutions

$$\mathrm{I} \begin{cases} a = \cos \frac{A}{2} \\ b = -\, i \sin \frac{A}{2} \end{cases} \qquad\qquad \mathrm{II} \begin{cases} a = -\, i \sin \frac{A}{2} \\ b = \cos \frac{A}{2} \end{cases}$$

Prenons le système I

On a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \cos \frac{A}{2} \\ 0 \\ -i \sin \frac{A}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{A}{2} & 0 & -i \sin \frac{A}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{A}{2} & 0 & -i \sin \frac{A}{2} \\ -i \sin \frac{A}{2} & 0 & \cos \frac{A}{2} & 0 \\ 0 & -i \sin \frac{A}{2} & 0 & \cos \frac{A}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \exp(-i\sigma_4 \tfrac{A}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On notera que σ_4 commute avec α_i et σ_i d'où en posant $A = \theta_4$ le spineur général :

$$\varphi = \prod_{i=1}^{4} \exp(-i \sigma_i \frac{\theta_i}{2}) \prod_{j=1}^{3} \exp(\alpha_j \frac{\gamma_j}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$\varphi = \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \frac{A}{2} \\ 0 \\ -\, i \sin \frac{A}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{l} \exp[-\, i \frac{A}{2}] - m \exp[i \frac{A}{2}] \\ \bar{n} \exp[-\, i \frac{A}{2}] + k \exp[i \frac{A}{2}] \\ \bar{l} \exp[-\, i \frac{A}{2}] + m \exp[i \frac{A}{2}] \\ \bar{n} \exp[-\, i \frac{A}{2}] - k \exp[i \frac{A}{2}] \end{pmatrix} ,$$

d'où

$$\begin{cases} 2\varphi_1 = \bar{l} \exp[-\, i \frac{A}{2}] - m \exp[i \frac{A}{2}] \\ 2\varphi_2 = \bar{n} \exp[-\, i \frac{A}{2}] + k \exp[i \frac{A}{2}] \\ 2\varphi_3 = \bar{l} \exp[-\, i \frac{A}{2}] + m \exp[i \frac{A}{2}] \\ 2\varphi_4 = \bar{n} \exp[-\, i \frac{A}{2}] - k \exp[i \frac{A}{2}] \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} k = (\varphi_2 - \varphi_4) \exp[-\, i \frac{A}{2}] \\ l = (\varphi_1^* + \varphi_3^*) \exp[-\, i \frac{A}{2}] \\ m = (\varphi_3 - \varphi_1) \exp[-\, i \frac{A}{2}] \\ n = (\varphi_2^* + \varphi_4^*) \exp[-\, i \frac{A}{2}] \end{cases}$$

Si au lieu de la solution I on avait pris II on trouverait

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\, i \sin \frac{A}{2} \\ 0 \\ \cos \frac{A}{2} \end{pmatrix} = \exp[-\, i \sigma_4 \frac{A}{2}] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$