

SÉMINAIRE L. DE BROGLIE. THÉORIES PHYSIQUES

D. BOHM

G. LOCHAK

J. P. VIGIER

Expression des paramètres relativistes de Cayley-Klein en fonction des angles d'Euler

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 25 (1955-1956), exp. n° 8 bis, p. 11-18

http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1955-1956__25__A7_0

© Séminaire L. de Broglie. Théories physiques
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire L. de Broglie. Théories physiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

--:--:--

Séminaire de THÉORIES PHYSIQUES
(Séminaire Louis de BROGLIE)

Année 1955/1956

ANNEXE à L'EXPOSÉ 8

--:--:--

Expression des paramètres
relativistes de Cayley-Klein
en fonction des angles d'Euler.

1.- Matrices de rotation dans l'espace-temps :

Soient les matrices décrivant les rotations autour des plans de coordonnées de l'espace-temps.

A	rotation de l'angle	α	autour de	yOz .
B	" " "	β	" "	yOt
C	" " "	γ	" "	zOt
D	" " "	ψ	" "	xOt
E	" " "	χ	" "	xOz
F	" " "	θ	" "	xOy
G	" " "	φ	" "	xOt

$$A = \begin{pmatrix} \text{ch}\alpha & 0 & 0 & -\text{sh}\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\text{sh}\alpha & 0 & 0 & \text{ch}\alpha \end{pmatrix} \quad
 B = \begin{pmatrix} \text{ch}\beta & 0 & -\text{sh}\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sh}\beta & 0 & \text{ch}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad
 C = \begin{pmatrix} \text{ch}\gamma & -\text{sh}\gamma & 0 & 0 \\ -\text{sh}\gamma & \text{ch}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad
 E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\chi & 0 & -\sin\chi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\chi & 0 & \cos\chi \end{pmatrix} \quad
 F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La rotation générale de l'axe des temps s'écrira $\Omega_L = ABC$: c'est la transformation de Lorentz sans rotation des axes d'espace.

La rotation des axes d'espace s'écrira de deux façons :

- a) $\Omega_R = DEF$: rotations successives autour des axes d'espace.
 b) $\Omega_E = DFG$: rotation suivant les angles d'Euler.

La rotation générale s'écrira donc :

$$\text{soit : } \Omega = \Omega_L \cdot \Omega_R = ABCDEF$$

$$\text{soit : } \Omega = \Omega_L \cdot \Omega_E = ABCDFG$$

2.- Expression des rotations en fonction des paramètres de Cayley-Klein :

Résumons brièvement la théorie des spineurs.

On considère dans un espace A_4 affine, complexe à quatre dimensions, deux plans A_2 et $A_2^{\hat{}}$ à deux dimensions et ayant un seul point commun.

Soient les repères affines tels que deux des vecteurs de base soient dans A_2 et les deux autres dans $A_2^{\hat{}}$, et considérons les transformations unimodulaires définies par :

$$e_{\lambda'} = \alpha_{\lambda'}^{\lambda} e_{\lambda} \quad \lambda = 1, 2$$

$$e_{\hat{\mu}} = \hat{\alpha}_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}} e_{\hat{\mu}} \quad \hat{\mu} = 1, 2$$

$$\text{avec } \text{Det} \parallel \alpha_{\lambda'}^{\lambda} \parallel = \text{Det} \parallel \hat{\alpha}_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}} \parallel = 1$$

On introduit le spin-tenseur de second rang $e^{\lambda \hat{\mu}}$, tel que :

$$c^{\lambda \mu} = c^{\hat{\lambda} \hat{\mu}} = 0, \quad c^{\lambda \hat{\mu}} = c$$

cette définition est invariante avec la loi de transformation :

$$c^{\lambda' \hat{\mu}'} = \alpha_{\lambda'}^{\lambda} \hat{\alpha}_{\hat{\mu}'}^{\hat{\mu}} c^{\lambda \hat{\mu}}$$

On pose alors :

$$c^{\lambda \hat{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^{1\hat{1}} & c^{1\hat{2}} \\ 0 & 0 & c^{2\hat{1}} & c^{2\hat{2}} \\ c^{\hat{1}1} & c^{\hat{1}2} & 0 & 0 \\ c^{\hat{2}1} & c^{\hat{2}2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^3 - x^0 & x^1 - ix^2 \\ 0 & 0 & x^1 + ix^2 & -x^3 - x^0 \\ x^3 - x^0 & x^1 + ix^2 & 0 & 0 \\ x^1 - ix^2 & -x^3 - x^0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x^0, x^1, x^2, x^3 étant les ^{composantes} contravariantes d'un vecteur de l'espace temps.

Les transformations étant unimodulaires, on vérifie que :

$$c^{1\hat{1}} c^{2\hat{2}} - c^{1\hat{2}} c^{2\hat{1}} = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

est invariant, ce qui montre la correspondance entre les transformations spinarielles et le groupe des rotations.

De plus, on a :

$$c^{\lambda \hat{\mu}} = (\overline{c^{\hat{\mu} \lambda}}), \text{ ce qui entraîne :}$$

$$\alpha_{\hat{\lambda}}^{\hat{\lambda}'} = \overline{\alpha_{\lambda}^{\lambda'}}$$

Les transformations spinorielles s'écriront alors, sur les composantes contravariantes d'un spineur Ψ :

$$\begin{aligned} \Psi^{1'} &= k \Psi^1 + \ell \Psi^2 & \Psi^{\hat{1}'} &= \bar{k} \Psi^{\hat{1}} + \bar{\ell} \Psi^{\hat{2}} \\ \Psi^{2'} &= m \Psi^1 + n \Psi^2 & \Psi^{\hat{2}'} &= \bar{m} \Psi^{\hat{1}} + \bar{n} \Psi^{\hat{2}} \end{aligned}$$

les composantes covariantes seront

$$\Psi_1, \Psi_2, \Psi_{\hat{1}}, \Psi_{\hat{2}} = \Psi^2, -\Psi^1, \Psi^{\hat{2}}, -\Psi^{\hat{1}}$$

et on a toujours la condition :

$$\begin{vmatrix} k & \ell \\ m & n \end{vmatrix} = 1$$

k, ℓ, m, n sont les paramètres de Cayley-Klein.

La transformation $c^{\lambda \hat{\mu}'} = \alpha_{\lambda}^{\lambda'} \alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'} c^{\lambda \hat{\mu}}$ s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} x^{3'} - x^{0'} & x^{1'} - ix^{2'} \\ x^{1'} + ix^{2'} & -x^{3'} - x^{0'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & \ell \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 - x^0 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 - x^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{k} & \bar{m} \\ \bar{\ell} & \bar{n} \end{pmatrix}$$

d'où l'on tire

$$2x^{0'} = x^0(k\bar{k} + \ell\bar{\ell} + m\bar{m} + n\bar{n}) + x^1(-\bar{k}\ell - k\bar{\ell} - m\bar{n} - \bar{m}n) + ix^2(k\bar{\ell} - \bar{k}\ell + m\bar{n} - \bar{m}n) + x^3(-k\bar{k} + \ell\bar{\ell} - m\bar{m} + n\bar{n})$$

$$2x^{1'} = x^0(-k\bar{m} - \bar{k}m - \ell\bar{n} - \bar{\ell}n) + x^1(k\bar{n} + \bar{k}n + \ell\bar{m} + \bar{\ell}m) + ix^2(\bar{k}n - k\bar{n} + \bar{\ell}m - \ell\bar{m}) + x^3(k\bar{m} + \bar{k}m - \ell\bar{n} - \bar{\ell}n)$$

$$2x^{2'} = x^0(k\bar{m} - \bar{k}m + \ell\bar{n} - \bar{\ell}n) + x^1(\bar{k}n - k\bar{n} + \bar{\ell}m - \ell\bar{m}) + ix^2(k\bar{n} + \bar{k}n - \bar{\ell}m - \ell\bar{m}) + x^3(\bar{k}m - k\bar{m} + \ell\bar{n} - \bar{\ell}n)$$

$$2x^{3'} = x^0(-k\bar{k} - \ell\bar{\ell} + m\bar{m} + n\bar{n}) + x^1(\bar{k}\ell + k\bar{\ell} - m\bar{n} - \bar{m}n) + ix^2(\bar{k}\ell - k\bar{\ell} + m\bar{n} - \bar{m}n) + x^3(k\bar{k} - \ell\bar{\ell} - m\bar{m} + n\bar{n})$$

3.- Calcul des Paramètres de Cayley-Klein en fonction des angles.

Nous allons calculer les paramètres correspondants à la rotation d'angle θ autour de $x_0 t$. On a à résoudre le système de 17 équations

$$(0) : kn - \ell m = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \bar{k}\ell + k\bar{\ell} + \bar{m}n + m\bar{n} = 0 \\ (2) \quad \bar{k}\ell - k\bar{\ell} + \bar{m}n - m\bar{n} = 0 \\ (3) \quad -k\bar{k} - m\bar{m} + \ell\bar{\ell} + n\bar{n} = 0 \\ (4) \quad k\bar{m} + \bar{k}m + \ell\bar{n} + \bar{\ell}n = 0 \\ (5) \quad \ell\bar{m} - \bar{\ell}m + \bar{k}n - k\bar{n} = 0 \\ (6) \quad k\bar{m} + \bar{k}m - \ell\bar{n} - \bar{\ell}n = 0 \\ (7) \quad k\bar{m} - \bar{k}m + \ell\bar{n} - \bar{\ell}n = 0 \\ (8) \quad -\ell\bar{m} + \bar{\ell}m - k\bar{n} + \bar{k}n = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (9) \quad k\bar{k} - m\bar{m} + \ell\bar{\ell} - n\bar{n} = 0 \\ (10) \quad \bar{k}\ell + k\bar{\ell} - \bar{m}n - m\bar{n} = 0 \\ (11) \quad k\bar{k} + \ell\bar{\ell} + m\bar{m} + n\bar{n} = 2 \\ (12) \quad \ell\bar{m} + m\bar{\ell} + \bar{k}n + k\bar{n} = 2 \\ (13) \quad k\bar{n} + \bar{k}n - \ell\bar{m} - \bar{\ell}m = 2 \cos \theta \\ (14) \quad \bar{k}m - k\bar{m} + \ell\bar{n} - \bar{\ell}n = 2 i \sin \theta \\ (15) \quad \bar{k}\ell - k\bar{\ell} + m\bar{n} - \bar{m}n = 2 i \sin \theta \\ (16) \quad k\bar{k} - \ell\bar{\ell} - m\bar{m} + n\bar{n} = 2 \cos \theta \end{array} \right.$$

On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} (11) + (16) : (a) \quad k\bar{k} + n\bar{n} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ (11) - (16) : (a') \quad \ell\bar{\ell} + m\bar{m} = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (3) + (9) : (b) : \ell\bar{\ell} - m\bar{m} = 0 \\ (3) - (9) : (b') : -k\bar{k} + n\bar{n} = 0 \end{array} \right.$$

d'où

$$I \quad \left\{ \begin{array}{l} k\bar{k} = n\bar{n} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \ell\bar{\ell} = m\bar{m} = \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{array} \right.$$

Par ailleurs

$$\left\{ \begin{array}{l} (12) + (13) : (c) \quad k\bar{n} + \bar{k}n = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ (12) - (13) : (c') \quad \ell\bar{m} + \bar{\ell}m = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (5) + (8) : (d) : \bar{k}n - k\bar{n} = 0 \\ (5) - (8) : (d') : \ell\bar{m} - \bar{\ell}m = 0 \end{array} \right.$$

d'où

$$II \quad \left\{ \begin{array}{l} k\bar{n} = \bar{k}n = \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \ell\bar{m} = \bar{\ell}m = \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{array} \right.$$

En comparant I et II il vient $k = n$ et $\ell = m$.

La relation (0) devient alors

$$k^2 - \ell^2 = 1 \quad (0')$$

D'autre part,

$$(1) + (2) : \bar{k}\ell + \bar{m}n = 0 \quad \text{et} \quad (2) + (10) : \bar{k}\ell - \bar{m}n = 0.$$

d'où $\bar{m}n + \bar{m}\bar{n} = 0 \quad (\alpha) \quad \text{et} \quad \bar{k}\ell + k\bar{\ell} = 0 \quad (\beta)$

Multiplions (β) par k : $k\bar{k}\ell + k^2\bar{\ell} = 0$. Soit d'après $(0')$

$$\ell \cos^2 \frac{\theta}{2} + \bar{\ell} (1 + \ell^2) = 0 \quad \text{donc} \quad \ell \cos^2 \frac{\theta}{2} + \bar{\ell} + \ell \sin^2 \frac{\theta}{2} = 0,$$

donc : $\ell + \bar{\ell} = 0$,

d'où $\ell = m = \pm i \sin \frac{\theta}{2}$ ce qui donne $k = \pm \cos \frac{\theta}{2}$.

Or si $\theta = 0$ on doit retrouver la matrice unité, d'où $k = n = \cos \frac{\theta}{2}$.
Pour avoir le signe de ℓ , on porte $\ell = m = \pm i \sin \frac{\theta}{2}$ dans (14) par exemple.

Il vient après simplification, $2 i \sin \theta = 2 i \sin \theta$.

donc $\ell = m = i \sin \frac{\theta}{2}$.

Des calculs analogues nous conduiraient à l'expression des autres matrices de rotation. On trouve les sept matrices :

$$a = \begin{pmatrix} \text{ch } \frac{\alpha}{2} & \text{sh } \frac{\alpha}{2} \\ \text{sh } \frac{\alpha}{2} & \text{ch } \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \exp(\tau_1' \frac{\alpha}{2}) \quad b = \begin{pmatrix} \text{ch } \frac{\beta}{2} & -i \text{sh } \frac{\beta}{2} \\ i \text{sh } \frac{\beta}{2} & \text{ch } \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = \exp(\tau_2' \frac{\beta}{2})$$

$$\begin{aligned}
 c &= \begin{pmatrix} e^{\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma/2} \end{pmatrix} = \exp(\sigma_3' \frac{\gamma}{2}) & d &= \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} = \exp(i\sigma_3' \frac{\psi}{2}) \\
 e &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\lambda}{2} & \sin \frac{\lambda}{2} \\ -\sin \frac{\lambda}{2} & \cos \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} = \exp(i\sigma_2' \frac{\lambda}{2}) & f &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \exp(i\sigma_1' \frac{\theta}{2}) \\
 g &= \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} = \exp(i\sigma_3' \frac{\psi}{2})
 \end{aligned}$$

où σ_1' , σ_2' , σ_3' sont les matrices de Pauli

4.- L'équation de Dirac.

On introduit le spin-tenseur contravariant.

$$D^{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial x^1} - i \frac{\partial}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^1} + i \frac{\partial}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^0} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial x^1} + i \frac{\partial}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} - i \frac{\partial}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^0} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarquera que l'invariant de ce spineur est le dalembertien.

Considérons maintenant le spineur $\tilde{\Psi}^{\lambda} = D^{\lambda\mu} \Psi_{\mu}$. En imposant que $\tilde{\Psi}^{\lambda} = \frac{mc}{\hbar} \Psi^{\lambda}$ on a l'équation de Dirac :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \tilde{\Psi}^1 &= \frac{\partial \Psi^1}{\partial x^3} + \frac{\partial \Psi^1}{\partial x^0} + \frac{\partial \Psi^2}{\partial x^1} - i \frac{\partial \Psi^2}{\partial x^2} = -\frac{mc}{\hbar} \Psi^2 \\
 \tilde{\Psi}^2 &= \frac{\partial \Psi^1}{\partial x^1} + i \frac{\partial \Psi^1}{\partial x^0} - \frac{\partial \Psi^2}{\partial x^3} + \frac{\partial \Psi^2}{\partial x^0} = \frac{mc}{\hbar} \Psi^1 \\
 \tilde{\Psi}^3 &= \frac{\partial \Psi^1}{\partial x^3} + \frac{\partial \Psi^1}{\partial x^0} + \frac{\partial \Psi^2}{\partial x^1} + i \frac{\partial \Psi^2}{\partial x^2} = -\frac{mc}{\hbar} \Psi^2 \\
 \tilde{\Psi}^4 &= \frac{\partial \Psi^1}{\partial x^1} - i \frac{\partial \Psi^1}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi^2}{\partial x^3} + \frac{\partial \Psi^2}{\partial x^0} = -\frac{mc}{\hbar} \Psi^1
 \end{aligned} \right.$$

Introduisons le spineur défini par :

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \frac{1}{2} (i\Psi_2 - \Psi_1) \\ \Psi_2 &= -\frac{1}{2} (\Psi_2 + i\Psi_1) \\ \Psi_3 &= \frac{1}{2} (\Psi_1 + i\Psi_2) \\ \Psi_4 &= \frac{1}{2} (\Psi_2 - i\Psi_1)\end{aligned}$$

Les équations s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{aligned}\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} &= \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + i \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \varphi_4 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^3} - i \frac{mc}{\hbar} \varphi_1 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} &= \left(\frac{\partial}{\partial x^1} - i \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \varphi_3 - \frac{\partial \varphi_4}{\partial x^3} - i \frac{mc}{\hbar} \varphi_2 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} &= \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + i \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \varphi_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^3} + i \frac{mc}{\hbar} \varphi_3 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_4}{\partial t} &= \left(\frac{\partial}{\partial x^1} - i \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \varphi_1 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^3} + i \frac{mc}{\hbar} \varphi_4\end{aligned}\right.$$

5.- Calcul de la transformation linéaire du spineur de Dirac en fonction des paramètres de Cayley-Klein.

On a

$$\left\{ \begin{aligned}\Psi_1 &= \varphi_3 - \varphi_1 \\ \Psi_2 &= \varphi_4 - \varphi_2 \\ \Psi_1' &= i(\varphi_4 + \varphi_2) \\ \Psi_2' &= i(\varphi_1 + \varphi_3)\end{aligned}\right.$$

On a

$$\left\{ \begin{aligned}\Psi_1' &= n \Psi_1 - m \Psi_2 = n(\varphi_3 - \varphi_1) - m(\varphi_4 - \varphi_2) = \varphi_3' - \varphi_1' \\ \Psi_2' &= -\ell \Psi_1 + k \Psi_2 = -\ell(\varphi_3 - \varphi_1) + k(\varphi_4 - \varphi_2) = \varphi_4' - \varphi_2' \\ \Psi_1' &= \bar{n} \Psi_1' - \bar{m} \Psi_2' = \bar{n}i(\varphi_4 + \varphi_2) + \bar{m}i(\varphi_1 + \varphi_3) = i(\varphi_2' + \varphi_4') \\ \Psi_2' &= -\bar{\ell} \Psi_1' + \bar{k} \Psi_2' = -\bar{\ell}i(\varphi_4 + \varphi_2) - \bar{k}i(\varphi_1 + \varphi_3) = i(\varphi_1' + \varphi_3')\end{aligned}\right.$$

On voit alors aisément que les Ψ se transforment par la matrice

$$\Lambda = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{k} + n & \bar{\ell} - m & \bar{k} - n & \bar{\ell} + m \\ -\ell + \bar{m} & k + \bar{n} & \ell + \bar{m} & -k + \bar{n} \\ \bar{k} - n & \bar{\ell} + m & \bar{k} + n & \bar{\ell} - m \\ \ell + \bar{m} & -k + \bar{n} & -\ell + \bar{m} & k + \bar{n} \end{pmatrix}$$

Les matrices a, b, c, d, e, f, g nous donnent les expressions de k, l, m, n en fonction des angles de rotation. On en tire alors les expressions de .

Si on pose :

γ_i = rotation du i -ième axe d'espace vers le temps.

α_i = matrice-courant de Dirac.

θ_j = rotation d'espace autour du j -ième axe.

σ_j = matrice-spin de Dirac.

On trouve pour une transformation simple de Lorentz :

$$\Lambda_i = \exp(\alpha_i \frac{\gamma_i}{2})$$

et pour une rotation d'espace :

$$\Lambda_j = \exp(-i \sigma_j \frac{\theta_j}{2})$$

D'où la transformation générale :

$$\Lambda = \prod_{i=1}^3 \exp(\alpha_i \frac{\gamma_i}{2}) \cdot \prod_{j=1}^3 \exp(-i \sigma_j \frac{\theta_j}{2})$$

Si la transformation est infinitésimale, on retrouve l'expression connue :

$$l = 1 + \vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\delta\gamma}}{2} - i \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{\delta\theta}}{2}$$

Calcul des paramètres de Cayley-Klein dans le cas de la rotation générale.

On considère la rotation d'Euler la plus générale

Soit $\omega_i = abc$ et $\omega_{\bar{i}} = dfg$. On a alors $L = \omega_i \cdot \omega_{\bar{i}} = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$

d'où

$$L = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch} \frac{\alpha}{2} & \text{sh} \frac{\alpha}{2} \\ \text{sh} \frac{\alpha}{2} & \text{ch} \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch} \frac{\beta}{2} & -i \text{sh} \frac{\beta}{2} \\ i \text{sh} \frac{\beta}{2} & \text{ch} \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

d'où en identifiant

$$\begin{cases} k = \exp\left[\frac{\gamma+i\psi+\varphi}{2}\right] \cos\frac{\theta}{2} (\text{ch}\frac{\alpha}{2} \text{ch}\frac{\beta}{2} + i \text{sh}\frac{\alpha}{2} \text{sh}\frac{\beta}{2}) + i \exp\left[-\frac{\gamma+\psi-\varphi}{2}\right] \sin\frac{\theta}{2} (\text{sh}\frac{\alpha}{2} \text{ch}\frac{\beta}{2} - i \text{sh}\frac{\beta}{2} \text{ch}\frac{\alpha}{2}) \\ l = i \exp\left[\frac{\gamma+i\psi-\varphi}{2}\right] \sin\frac{\theta}{2} (\text{ch}\frac{\alpha}{2} \text{ch}\frac{\beta}{2} + i \text{sh}\frac{\alpha}{2} \text{sh}\frac{\beta}{2}) + \exp\left[-\frac{\gamma+\psi+\varphi}{2}\right] \cos\frac{\theta}{2} (\text{sh}\frac{\alpha}{2} \text{ch}\frac{\beta}{2} - i \text{sh}\frac{\beta}{2} \text{ch}\frac{\alpha}{2}) \\ m = \exp\left[\frac{\gamma+i\psi+\varphi}{2}\right] \cos\frac{\theta}{2} (\text{ch}\frac{\beta}{2} \text{sh}\frac{\alpha}{2} + i \text{sh}\frac{\beta}{2} \text{ch}\frac{\alpha}{2}) + i \exp\left[-\frac{\gamma-\psi-\varphi}{2}\right] \sin\frac{\theta}{2} (\text{ch}\frac{\alpha}{2} \text{ch}\frac{\beta}{2} - i \text{sh}\frac{\alpha}{2} \text{sh}\frac{\beta}{2}) \\ n = i \exp\left[\frac{\gamma+i\psi-\varphi}{2}\right] \sin\frac{\theta}{2} (\text{ch}\frac{\beta}{2} \text{sh}\frac{\alpha}{2} + i \text{sh}\frac{\beta}{2} \text{ch}\frac{\alpha}{2}) + \exp\left[-\frac{\gamma-\psi+\varphi}{2}\right] \cos\frac{\theta}{2} (\text{ch}\frac{\alpha}{2} \text{ch}\frac{\beta}{2} - i \text{sh}\frac{\alpha}{2} \text{sh}\frac{\beta}{2}) \end{cases}$$

Plaçons nous dans le système propre

Nous pouvons supposer que

$$\Psi_1 = 0 \text{ et que } \Psi_2 = 0 \text{ d'où } \Psi_1 = 0 \quad \Psi_2 = a \quad \Psi_3 = 0 \quad \Psi_4 = b .$$

$$\text{On a alors les invariants } \begin{cases} \Omega_1 = \Psi^* \alpha_4 \Psi = a\bar{a} - b\bar{b} \\ \Omega_2 = \Psi^* \alpha_5 \Psi = i(\bar{a}b - a\bar{b}) \end{cases}$$

On peut poser, le spineur étant défini à un facteur multiplicatif près :
 $\Omega_1 = \cos A$ et $\Omega_2 = \sin A$. On trouve alors les deux solutions

$$\text{I } \begin{cases} a = \cos \frac{A}{2} \\ b = -i \sin \frac{A}{2} \end{cases} \qquad \text{II } \begin{cases} a = -i \sin \frac{A}{2} \\ b = \cos \frac{A}{2} \end{cases}$$

Prenons le système I

On a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \cos \frac{A}{2} \\ 0 \\ -i \sin \frac{A}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{A}{2} & 0 & -i \sin \frac{A}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{A}{2} & 0 & -i \sin \frac{A}{2} \\ -i \sin \frac{A}{2} & 0 & \cos \frac{A}{2} & 0 \\ 0 & -i \sin \frac{A}{2} & 0 & \cos \frac{A}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \exp(-i\sigma_4 \frac{A}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On notera que σ_4 commute avec α_i et σ_i d'où en posant $A = \theta_4$ le spineur général :

$$\Psi = \prod_{i=1}^4 \exp(-i\sigma_i \frac{\theta_i}{2}) \prod_{j=1}^3 \exp(\alpha_j \frac{\delta_j}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \frac{A}{2} \\ 0 \\ -i \sin \frac{A}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{l} \exp[-i \frac{A}{2}] - m \exp[i \frac{A}{2}] \\ \bar{n} \exp[-i \frac{A}{2}] + k \exp[i \frac{A}{2}] \\ \bar{l} \exp[-i \frac{A}{2}] + m \exp[i \frac{A}{2}] \\ \bar{n} \exp[-i \frac{A}{2}] - k \exp[i \frac{A}{2}] \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} 2 \Psi_1 = \bar{l} \exp[-i \frac{A}{2}] - m \exp[i \frac{A}{2}] \\ 2 \Psi_2 = \bar{n} \exp[-i \frac{A}{2}] + k \exp[i \frac{A}{2}] \\ 2 \Psi_3 = \bar{l} \exp[-i \frac{A}{2}] + m \exp[i \frac{A}{2}] \\ 2 \Psi_4 = \bar{n} \exp[-i \frac{A}{2}] - k \exp[i \frac{A}{2}] \end{cases} \quad \text{donc } \begin{cases} k = (\Psi_2 - \Psi_4) \exp[-i \frac{A}{2}] \\ l = (\Psi_1^* + \Psi_3^*) \exp[-i \frac{A}{2}] \\ m = (\Psi_3 - \Psi_1) \exp[-i \frac{A}{2}] \\ n = (\Psi_2^* + \Psi_4^*) \exp[-i \frac{A}{2}] \end{cases}$$

Si au lieu de la solution I on avait pris II on trouverait

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -i \sin \frac{A}{2} \\ 0 \\ \cos \frac{A}{2} \end{pmatrix} = \exp[-i \sigma_4 \frac{A}{2}] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$