L. Schwartz

Opérations algébriques sur les distributions à valeur vectorielle. Théorème de Künneth

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 24, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A25_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-:-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ
Année 1953-1954

-:-:-:-:-

16 Juin 1954

Dernier exposé (n° 24)

OPÉRATIONS ALGÉBRIQUES SUR LES DISTRIBUTIONS À VALEUR VECTORIELLE - THÉORÈME DE KÜNNETH

Pour simplifier, E et F seront des Banach.

1.- Définition directe de $\langle T \underset{,}{\otimes} \varphi \rangle \in E \hat{\otimes}_\pi F$ pour $T \in \mathcal{D}'(E)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(F)$.

Fig (1)

$$\begin{array}{ccc} \vec{\varphi} \in \mathcal{D} & \hat{\otimes}_\pi & F \\ \vec{T}\downarrow & & 1\downarrow \\ E & \hat{\otimes}_\pi & F \end{array}$$

On peut définir l'application $\varphi \longrightarrow \langle T \underset{,}{\otimes} \varphi \rangle$ de $\mathcal{D} \hat{\otimes}_\pi F$ dans $E \hat{\otimes}_\pi F$ comme étant le produit tensoriel $\vec{T} \otimes 1_F$ de l'application $\vec{T}$ de $\mathcal{D}$ dans E et de l'application identique de F dans F. Par suite $\langle T \underset{,}{\otimes} \varphi \rangle \longrightarrow 0$ si $\varphi \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(F)$ et si T reste dans un ensemble équicontinu de $\mathcal{L}(\mathcal{D}, E)$ c'est-à-dire si T reste borné dans $\mathcal{D}'(E)$.

Fig (2)

$$\begin{array}{ccc} \vec{T} \in \mathcal{D}' & \hat{\otimes}_\pi & E \\ \vec{\varphi}\downarrow & & \downarrow 1 \\ F & & E \end{array}$$

On peut également écrire $\varphi \in \mathcal{D}(F) = \mathcal{L}(\mathcal{D}'_c ; F) = \mathcal{L}(\mathcal{D}', F)$ et $T \in \mathcal{D}' \hat{\otimes}_\pi E$. L'application $T \longrightarrow \langle T \underset{,}{\otimes} \varphi \rangle$ est alors le produit tensoriel $1_E \otimes \vec{\varphi}$ de l'application

$U \longrightarrow \langle U, \varphi \rangle$ de $\mathcal{D}'$ dans F et de l'application identique de E dans E. Par suite $\langle T \underset{,}{\otimes} \varphi \rangle \longrightarrow 0$ si $T \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}'(E)$ et si φ reste dans un ensemble équicontinu de $\mathcal{L}(\mathcal{D}', F)$ c'est-à-dire si φ reste bornée dans $\mathcal{D}(F)$. On vérifiera que ces deux définitions sont équivalentes en prenant pour T et φ respectivement des éléments décomposables de $\mathcal{D}' \hat{\otimes}_\pi E$ et de $\mathcal{D} \hat{\otimes}_\pi F$; elles permettent (dans une certaine mesure !) d'écrire

$$\langle \vec{T} \underset{,}{\otimes} \vec{\varphi} \rangle = (\vec{T} \otimes 1)(\vec{\varphi}) = (1 \otimes \vec{\varphi})(T)$$

2. - Produit multiplicatif

Pour $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}(F)$ et $\vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$ on définira $\alpha \otimes T$ (produit multiplicatif) $\in \mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\pi F)$ par

$$\langle \alpha \otimes T , \varphi \rangle = \langle T \overset{\otimes}{,} \alpha \varphi \rangle$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$

3. Produit direct

Soit $S_x \in \mathcal{D}'_x(E)$, $T_y \in \mathcal{D}'_y(F)$

En écrivant $S_x \in \mathcal{D}'_x \hat{\otimes}_\pi E$, $T_y \in \mathcal{D}'_y \otimes_\pi F$, on définit immédiatement $S_x \overset{\otimes}{\otimes} T_y \in \mathcal{D}'_x \otimes_\pi E \otimes_\pi \mathcal{D}'_y \otimes_\pi F$

$$= \mathcal{D}'_{xy} \hat{\otimes}_\pi (E \otimes_\pi F) = \mathcal{D}'_{xy} (E \otimes_\pi F)$$

On pourra vérifier que l'on a

$$\langle S_x \overset{\otimes}{\otimes} T_y , u(x)v(y) \rangle = \langle S_x, u(x) \rangle \otimes_\pi \langle T_y, v(y) \rangle$$

pour $u(x) \in \mathcal{D}_x$, $v(y) \in \mathcal{D}_y$, et plus généralement

$$\langle S_x \overset{\otimes}{\otimes} T_y \overset{\otimes}{,} u(x) \otimes v(y) = \langle S_x \overset{\otimes}{,} u(x) \rangle \otimes \langle T_y \overset{\otimes}{,} v(y) \rangle$$

si $u(x) \in \mathcal{D}_x(G)$ et $v(y) \in \mathcal{D}_y(H)$

4.- Convolution

Pour $S \in \mathcal{E}'(E)$ et $T \in \mathcal{D}'(F)$, on peut définir $S \overset{\otimes}{*} T \in \mathcal{D}'(E \otimes_\pi F)$ par

$$\langle S \overset{\otimes}{*} T , \varphi \rangle = \langle S_\xi \overset{\otimes}{\otimes} T_\eta , \varphi(\xi + \eta) \rangle$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$.

Autre méthode

On définit d'abord $\vec{S} * T \in \mathcal{D}'(E)$ pour $S \in \mathcal{E}'(E)$ et $T \in \mathcal{D}'$ en définissant l'application $S \longrightarrow S * T$ de $\mathcal{E}'(E) = \mathcal{E}' \otimes_\pi E$ dans $\mathcal{D}'(E) = \mathcal{D}' \otimes_\pi E$ comme le produit tensoriel de l'application $U \to U * T$ de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{D}'$ et de l'application identique de E dans E.

On vérifie alors que $T \longrightarrow \vec{S} * T$ est continue de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{E}'(E)$ (on vérifie même que $(\vec{S}, T) \longrightarrow \vec{S} * T$ est hypocontinue relativement aux parties bornées)

Puis on définit de même l'application $\vec{T} \longrightarrow \vec{S} * \vec{T}$ de $\mathcal{D}'(F) = \mathcal{D}' \otimes_\pi F$ dans $\mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_\pi F) = \mathcal{D}'(E) \hat{\otimes}_\pi F$ comme le produit tensoriel de l'application $U \longrightarrow \vec{S} * U$ de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'(E)$ et de l'application identique de F dans F.

La même méthode de définition s'applique si $\vec{S} \in \mathcal{O}'_c(E)$ et $T \in \mathcal{S}'(F)$ et il y a échange par la transformation de Fourier entre la convolution et le produit multiplicatif.

5.- Théorème de Künneth

Soit E et F deux espaces vectoriels topologiques et sur E et F respectivement deux opérateurs de dérivation d' et d'' (opérateurs linéaires continus de carré nul).

$E \otimes_\pi F$ sera muni d'un opérateur continu de carré nul de la forme $d = d' \otimes 1 + \eta \otimes d''$ (1)

Soit $H(E) = Z(E) / B(E)$ le groupe d'homologie de E

$H(F) = Z(F) / B(F)$ le groupe d'homologie de F

$H(E \otimes_\pi F) = Z(E \otimes_\pi F) / B(E \otimes_\pi F)$ le groupe d'homologie de $E \otimes_\pi F$

THÉORÈME.- Si E et F sont des espaces de Fréchet dont l'un est nucléaire, d' et d'' des homomorphismes topologiques, on a

$$H(E \otimes_\pi F) = H(E) \otimes_\pi H(F)$$

Exemple.- E et F sont les espaces des formes différentielles indéfiniment différentiables sur deux variétés V et W. E et F sont alors gradués et l'on prendra pour η l'opérateur multipliant la composante de degré n par $(-1)^n$, d' et d'' sont les différentiations extérieures sur V et W.

---

(1) On supposera $\eta d' + d' \eta = 0$ pour que d soit de carré nul, η étant un isomorphisme topologique de E sur lui-même.

Alors $E \otimes_\pi F$ est l'espace des formes différentielles indéfiniment différentiables sur $V \times W$, d la différentiation extérieure. On voit que $H(E)$, $H(F)$, $H(E \otimes_\pi F)$ sont les espaces vectoriels de cohomologie de V, W, $V \times W$. Ces espaces apparaissent comme munis de topologies (quotients), et $H(E \otimes_\pi F)$ est le <u>complété</u> de $H(E) \otimes H(F)$

<u>Remarque</u>.- $H(E)$, $H(F)$ et $H(E \otimes_\pi F)$ sont des Frechet car $Z(E)$, $Z(F)$ et $Z(E \otimes_\pi F)$ sont des Frechet; $B(E)$, $B(F)$ et $B(E \hat{\otimes}_\pi F)$ sont fermés (car d' d'' et d sont des homomorphismes topologiques) (rappelons que le quotient d'un Frechet par un sous-espace fermé est complet).

On démontrera d'abord le théorème dans le cas où $d'' = 0$ c'est-à-dire le lemme suivant

<u>Lemme</u>.- <u>Si</u> E <u>et</u> F <u>sont des Frechet dont l'un est nucléaire</u>, d' <u>un homomorphisme topologique et</u> $d = d' \otimes 1$, <u>on a</u> :

$$H(E \hat{\otimes} F) = H(E) \hat{\otimes} F$$

<u>Démonstration</u>.- On sait que si A et B sont des Frechet et si $C = B/A$ c'est-à-dire si on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$$

on a également la suite exacte :

$$0 \to A \hat{\otimes} F \xrightarrow{i \otimes 1} B \hat{\otimes} F \xrightarrow{\pi \otimes 1} C \hat{\otimes} F \longrightarrow 0$$

si B ou F est nucléaire.

En effet $A \hat{\otimes} F$ est un sous-espace topologique de $B \hat{\otimes} F$ (considérer le produit tensoriel comme le produit ε) et $C \hat{\otimes} F = B \hat{\otimes} F / \overline{A \otimes F}$ (considérer le produit tensoriel comme le produit π)

En appliquant cette remarque à la suite exacte

$$0 \longrightarrow Z(E) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{d'} B(E) \longrightarrow 0$$

on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow Z(E) \hat{\otimes} F \xrightarrow{i \otimes 1} E \hat{\otimes} F \xrightarrow{d' \otimes 1} B(E) \hat{\otimes} F \longrightarrow 0$$

Par suite $Z(E) \hat{\otimes} F$ est un sous-espace topologique de $E \hat{\otimes} F$ et est le noyau de l'application $d = d' \otimes 1$ d'où $Z(E) \hat{\otimes} F = Z(E \hat{\otimes} F)$

De plus $B(E) \hat{\otimes} F$ est l'image par d de $E \hat{\otimes} F$ donc

$$BE \hat{\otimes} F = B(E \hat{\otimes} F)$$

De même de la suite exacte

$$0 \longrightarrow B(E) \longrightarrow Z(E) \longrightarrow H(E) \longrightarrow 0$$

on tire :

$$0 \longrightarrow B(E) \hat{\otimes} F \longrightarrow Z(E) \hat{\otimes} F \longrightarrow H(E) \hat{\otimes} F \longrightarrow 0$$

d'où

$$H(E) \hat{\otimes} F = \frac{Z(E) \hat{\otimes} F}{B(E) \hat{\otimes} F} = \frac{Z(E \hat{\otimes} F)}{B(E \hat{\otimes} F)} = H(E \hat{\otimes} F)$$

<u>Démonstration du théorème</u>.-

De la suite exacte $0 \longrightarrow Z(E) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{d'} B(E) \longrightarrow 0$, on déduit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow Z(E) \hat{\otimes} F \xrightarrow{i \otimes 1} E \hat{\otimes} F \xrightarrow{d' \otimes 1} B(E) \hat{\otimes} F \longrightarrow 0$$

Cette suite exacte est compatible avec l'opérateur d , c'est-à-dire que les homomorphismes de la suite commutent trivialement avec d . Remarquer qu'on a $Z(E \hat{\otimes} F) \subset E \hat{\otimes} F$ et $B(E) \hat{\otimes} F \subset Z(E) \hat{\otimes} F$. On en déduit donc la suite exacte :

$$\begin{tikzcd} H\,(ZE \hat{\otimes} F) \arrow[rr] & & H\,(E \hat{\otimes} F) \arrow[dl] \\ & H(B(E) \hat{\otimes} F) \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd}$$

L'opérateur bord ∂ est défini comme suit.

Si $0 \longrightarrow A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$ est une suite exacte compatible avec un homomorphisme d (j est l'immersion de A dans B , π la projection de B sur B/A) , on a la suite exacte :

$$\begin{tikzcd} H\,(A) \arrow[rr, "j"] & & H\,(B) \arrow[dl, "\pi"] \\ & H(B/A) = H(C) \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd}$$

∂ est ainsi défini. Soit $\alpha \in H(B/A)$. Soit $\beta \in Z(B/A)$ dont la classe mod. $B\,(B/A)$ est α . On a $\beta \in B/A$. Donc il existe $\gamma \in B$ tel que $\pi\,\gamma = \beta$ et comme $\beta \in Z(B/A)$, $d\gamma \in A$. $\partial\alpha$ est la classe de $d\gamma$ dans $H(A)$. On applique ce résultat général en remplaçant A, B, C, γ , π par

A	$ZE \hat{\otimes} F$
B	$E \hat{\otimes} F$
C	$BE \hat{\otimes} F$
j	$i \otimes 1$
π	$d' \otimes 1$
d	$d' \otimes 1 + \eta \times d''$

L'homomorphisme ∂ est ainsi défini.

Soit $\alpha \in H(B(E) \hat{\otimes} F)$. Choisir $\beta \in Z(B(E) \hat{\otimes} F)$ tel que l'image de β par l'application canonique de $Z(B(E) \hat{\otimes} F)$ sur $H(B(E) \hat{\otimes} F)$ soit α. Considérant que $\beta \in B(E) \hat{\otimes} F$, il existe $\gamma \in E \hat{\otimes} F$ tel que $(d' \otimes 1)\gamma = \beta$ Comme $\beta \in Z(B(E) \hat{\otimes} F)$, on a $d\gamma \in Z(E) \hat{\otimes} F$. $\partial\alpha$ est la classe de $d\gamma$ dans $H(Z(E) \hat{\otimes} F)$.

Dans le cas présent, on a les particularités suivantes :

a) $H(Z(E) \hat{\otimes} F) = Z(E) \hat{\otimes} H(F)$ (d'après le Lemme car $d' = 0$ sur $Z(E)$ donc $d = \eta \otimes d''$).

b) $H(B(E) \hat{\otimes} F) = B(E) \hat{\otimes} H(F)$ (idem) et par suite :
$H(B(E) \hat{\otimes} F) \subset H(Z(E) \hat{\otimes} F)$

c) β peut être pris dans $B(E) \hat{\otimes} Z(F)$ car
$\beta \in Z(B(E) \hat{\otimes} F) = B(E) \hat{\otimes} Z(F)$
Alors on peut choisir $\gamma \in E \hat{\otimes} ZF$

d) On a $d\gamma = \beta$ car $d\gamma = (d' \otimes 1 + \eta \otimes d'')\gamma = \beta + (\eta \otimes d'')\gamma$ et $(\eta \otimes d'')\gamma = 0$ d'après c)
On a d'ailleurs bien $B(E) \hat{\otimes} Z(F) \subset Z(E) \hat{\otimes} F$.

e) Alors $\partial\alpha$, classe de β dans $H(Z(E) \hat{\otimes} F) = Z(E) \hat{\otimes} H(F)$, n'est autre que α lui-même ; α est bien dans $B(E) \hat{\otimes} H(F) \subset Z(E) \hat{\otimes} H(F)$
Ainsi ∂ est l'immersion canonique de $B(E) \hat{\otimes} H(F)$ dans $Z(E) \hat{\otimes} H(F)$.

f) ∂ étant biunivoque c'est-à-dire de noyau nul, l'application $H(E \hat{\otimes} F) \longrightarrow H(B(E) \hat{\otimes} F)$ est nulle c'est-à-dire a pour noyau $H(E \hat{\otimes} F)$ donc $H(Z(E) \hat{\otimes} F) \longrightarrow H(E \hat{\otimes} F)$ est un épimorphisme.

g) Par suite
$$\begin{aligned} H(E \hat{\otimes} F) &= H(Z(E) \hat{\otimes} F) / H(B(E) \hat{\otimes} F) \\ &= Z(E) \hat{\otimes} H(F) / B(E) \hat{\otimes} H(F) \\ &= H(E) \hat{\otimes} H(F) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.
