Bernard Malgrange

Calcul symbolique approximatif

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 7, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A7_0>

CALCUL SYMBOLIQUE APPROXIMATIF

par Bernard MALGRANGE

Dans la suite, la sphère unité sera notée Ω_x ou Ω_ξ selon l'espace où elle est plongée, ou encore simplement Ω quand il n'y aura pas de confusion possible. Enfin ds et $d\sigma$ désigneront les mesures superficielles de Ω_x et Ω_ξ respectivement.

1. Dérivées des distributions valeurs principales (v. p.).

Soit $k \in \Sigma$ (cf. exposés 3 et 4)

$$k = c\delta + \text{v.p.}\varkappa .$$

Par définition :

$$\langle \frac{\partial k}{\partial x_1} , \varphi \rangle = - \langle k , \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \rangle$$

$$= - c \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0) - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx .$$

Intégré par parties, le dernier terme devient :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big[\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\partial \varkappa}{\partial x_1} \varphi dx + \int_{|x| = \varepsilon} \varkappa \varphi dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \Big]$$

Or la deuxième de ces intégrales vaut :

$$\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \int_{|x|=1} \varkappa(x)\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n + \sum \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_i} \int_{|x|=1} \varkappa x_i\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n + O(\varepsilon)$$

En introduisant $\text{P.f.}\frac{\partial \varkappa}{\partial x_1}$ défini par la formule

$$\langle \text{P.f.}\frac{\partial \varkappa}{\partial x_1} , \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big[\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\partial \varkappa}{\partial x_1} \varphi\, dx + \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \int_{|x|=1} \varkappa dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \Big]$$

il vient :

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial k}{\partial x_1} = \text{P.f.}\dfrac{\partial \varkappa}{\partial x_1} + \sum c_i \dfrac{\partial \delta}{\partial x_i} \qquad \text{où} \\[2ex] c_1 = c + \displaystyle\int_{|x|=1} x_1 \varkappa\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n , \quad c_i = \int_{|x|=1} x_i \varkappa\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \end{cases}$$

(lorsque $i \neq 1$).

Soit maintenant $f(x)$ une fonction homogène de degré $1 - n$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $R^n - \{0\}$ (donc localement sommable sur R^n). Appelons $[\frac{\partial f}{\partial x_1}]$ sa dérivée usuelle sur $R^n - \{0\}$. L'intégrale $\int_{|x|=\ell} f(x)\, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ ne dépend pas de ℓ . Par suite

$$\int_{1<|x|<\ell} [\frac{\partial f}{\partial x_1}]\, dx = 0$$

d'où

(2) $$\int_{|x|=1} [\frac{\partial f}{\partial x_1}]\, ds = 0 \quad .$$

En reprenant alors le calcul de la dérivée au sens des distributions, il vient aisément :

(3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = c\delta + \text{v.p.}[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}] & \text{où} \\ c = \displaystyle\int_{|x|=1} f(x)\, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n & . \end{cases}$$

2. Lemme fondamental.

Soient $k \in \Sigma$ et $a \in \mathcal{B}^{1+\alpha}$ $(\alpha > 0)$. Le noyau $\varphi \to a.(k * \varphi) - k * (a.\varphi)$ (noté $[a. , k *]$) opère de $H^{p,0}$ dans $H^{p,1}$ et de $H^{p,-1}$ dans $H^{p,0}$ (pourvu que $1 < p < \infty$) avec une norme au plus égale à $C(p , \alpha) \|a\|_{\infty,1+\alpha} \|k\|_{\mathcal{B}^1(\Omega)}$.

a. La deuxième partie (application de $H^{p,-1}$ dans $H^{p,0}$) s'obtient par transposition à partir de la première appliquée à $k(- x)$ et $a(x)$.

b. $k = c\delta + \text{v.p.}\varkappa$ mais comme $[a. , \delta *] = 0$, on peut supposer $c = 0$.

c. Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, il faut majorer dans L^p les fonctions $[a. , k *]\varphi$ et $\frac{\partial}{\partial x_j}([a. , k *]\varphi)$. Mais pour la première, cette majoration résulte directement de ce que nous savons sur les opérateurs de multiplication et de convolution dans les L^p . D'autre part :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}([a. , k *]\varphi) = \frac{\partial a.}{\partial x_j}(k * \varphi) + a.(\frac{\partial k}{\partial x_j} * \varphi) - \frac{\partial k}{\partial x_j} * (a.\varphi)$$

$$= \frac{\partial a.}{\partial x_j}(k * \varphi) + [a. , \frac{\partial k}{\partial x_j} *]\varphi \quad .$$

Le premier terme de cette dernière expression est majoré par un nombre de la forme $C_p \|a\|_{\infty,1} \|k\|_{\mathcal{B}^0(\Omega)} \|\varphi\|_p$. Le deuxième s'écrit d'après (1) :

$$[a. \, , \, \mathrm{P.f.}\frac{\partial \varkappa}{\partial x_j} *]\varphi + \sum c_i [a. \, , \, \frac{\partial \delta}{\partial x_i} *]$$

Mais $[a. \, , \, \frac{\partial \delta}{\partial x_j} *] = - \frac{\partial a.}{\partial x_j}$ et, toujours d'après (1) :

$$|c_i| \leq \|k\|_{\mathcal{D}^0(\Omega)}$$

d. Nous sommes donc ramenés à majorer l'expression :

$$[a. \, , \, \mathrm{P.f.}\frac{\partial \varkappa}{\partial x_j} *]\varphi = \mathrm{P.f.} \int \frac{\partial \varkappa}{\partial x_j}(y) \, [a(x) - a(x-y)] \, \varphi(x-y) \, dy$$

$$= \int_{|y|>1} + \mathrm{P.f.} \int_{|y|<1}$$

$\frac{\partial \varkappa}{\partial x_j}$ étant sommable pour $|y| > 1$, la première intégrale satisfait encore à l'inégalité cherchée (et même, ici c'est seulement $\|a\|_{\infty,0}$ qui intervient). Maintenant, il nous reste à majorer :

$$\mathrm{P.f.} \int_{|y|<1} \frac{\partial \varkappa}{\partial x_j}(y) \, [a(x) - a(x-y)] \, \varphi(x-y) \, dy \quad .$$

Or, d'après la définition de $\mathcal{B}^{1+\alpha}$:

$$[a(x) - a(x-y) - \sum y_i \frac{\partial a}{\partial x_i}(x)] \leq \|a\|_{\infty, 1+\alpha} |y|^{1+\alpha}$$

mais $|y|^{1+\alpha} \frac{\partial \varkappa}{\partial x_j}(y)$ est sommable (localement, mais c'est désormais tout ce qui nous intéresse). Nous pouvons donc remplacer $a(x) - a(x-y)$ par $\sum y_i \frac{\partial a}{\partial x_i}(x)$.

e. Il s'agit donc maintenant de majorer :

$$\mathrm{P.f.} \int_{|y|<1} \sum y_i \frac{\partial a}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \varkappa}{\partial x_j}(y) \; \varphi(x-y) \, dy = \sum \frac{\partial a}{\partial x_i} \mathrm{P.f.} \int_{|y|<1} y_i \frac{\partial \varkappa}{\partial x_j}(y) \; \varphi(x-y) \, dy$$

Mais :

$$x_i \frac{\partial \varkappa}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i \varkappa) - \delta^i_j \varkappa$$

Les formules (2) et (3) (où $x_i \varkappa$ joue le rôle de f) nous ramènent donc aux résultats des exposés précédents. (En particulier (2) montre que les parties finies de la dernière expression sont en fait des valeurs principales).

Le lemme est démontré.

REMARQUE. - Si $a \in \mathcal{B}^{\ell+\alpha}$ $(\alpha > 0)$, $[a. \, , \, k *]$ opère de $H^{p,m}$ dans $H^{p,m+1}$ avec une norme au plus égale à $C(p \, , \, \ell \, , \, \alpha) \, \|a\|_{\infty, \ell+\alpha} \, \|k\|_{\mathcal{D}^1(\Omega)}$ pourvu que

$-\ell \leq m \leq \ell - 1$. (La démonstration est la même).

3. Les théorèmes du "calcul symbolique approximatif".

THÉORÈME 1. - Si $k \in \mathcal{B}^{1+\alpha}(\Sigma)$ $(\alpha > 0)$, $k(x , x - y) - k(y , x - y)$ opère de $H^{p,0}$ dans $H^{p,1}$ et de $H^{p,-1}$ dans $H^{p,0}$ avec une norme au plus égale à $C(p , \alpha) \|k\|_{\mathcal{B}^{1+\alpha}(\mathcal{D}^{n+1}_{\Omega})}$.

DÉMONSTRATION. - D'après le lemme de décomposition (et son complément) démontré dans l'exposé précédent :

$$k(x , y) = \sum a_\ell(x)\ b_\ell(y)$$

ou $a_\ell \in \mathcal{B}^{1+\alpha}$ $b_\ell \in \Sigma$ et $\sum \|a_\ell\|_{\infty,1+\alpha} \|b_\ell\|_{\mathcal{D}^1(\Omega)} \leq C \|k\|_{\mathcal{B}^{1+\alpha}(\mathcal{D}^{n+1}_{\Omega})}$.

L'opérateur étudié s'écrit donc :

$$\begin{aligned} k(x , x - y) - k(y , x - y) &= \sum [a_\ell(x)\ b_\ell(x - y) - a_\ell(y)\ b_\ell(x - y)] \\ &= \sum [a_\ell \cdot\ , b_\ell *] \end{aligned}$$

Le lemme fondamental, appliqué à chaque terme de cette série achève la démonstration.

THÉORÈME 2. - Soient k_1 et k_2 dans $\mathcal{B}^{1+\alpha}(\Sigma)$, alors $\theta k_1 \circ \theta k_2 - \theta(k_1 \underset{y}{*} k_2)$ opère de $H^{p,0}$ dans $H^{p,1}$ et de $H^{p,-1}$ dans $H^{p,0}$ (avec une norme majorée par le produit des normes, comme plus haut).

($\theta k_1 \circ \theta k_2$ désigne le composé des noyaux θk_1 et θk_2 , considérés par exemple comme opérateurs $H^{p,0} \longrightarrow H^{p,0}$).

DÉMONSTRATION. - Ici encore, on écrit :

$$k_1 = \sum a^1_\ell(x)\ b^1_\ell(y)$$

$$k_2 = \sum a^2_\ell(x)\ b^2_\ell(y)$$

On en déduit facilement :

$$\theta k_1 \circ \theta k_2 - \theta(k_1 \underset{y}{*} k_2) = \sum_{\ell,m} a^1_\ell(x)\ [a^2_m \cdot\ , b^1_\ell *] \circ b^2_m *$$

Maintenant, il suffit de nouveau, d'appliquer le lemme fondamental à chaque terme pour achever la démonstration.

COROLLAIRE. - $[\theta k_1 , \theta k_2]$ opère de $H^{p,0}$ dans $H^{p,1}$.

REMARQUE 1. - Dans l'énoncé du théorème 2 , il suffit de supposer $k_1 \in \mathcal{B}^1(\Sigma)$, car on n'applique pas le lemme aux a^1_ℓ (ce n'est plus vrai pour le corollaire).

REMARQUE 2. - Avec les hypothèses : k , k_1 , $k_2 \in \mathcal{B}^{\ell+\alpha}(\Sigma)$ les théorèmes 1 et 2 se généralisent, affirmant que les opérateurs considérés opèrent de $H^{p,m}$ dans $H^{p,m+1}$ pourvu que $-\ell \leq m \leq \ell - 1$. (Démonstration analogue).

Nous allons maintenant donner deux autres formulations de ces théorèmes en utilisant la terminologie de GIRAUD, TRICOMI, MIKHLIN (voir [1] et [2]).

k étant dans $L^\infty_x(\Sigma_{\dot y})$ on considère $\mathcal{F}_y\, k \in L^\infty(\hat{\Sigma})$. Posant $n = \theta k$, on appelle : $\sigma(n) = \mathcal{F}_y\, k$ le symbole de n , et l'on définit $\bar{n}$ par : $\overline{\sigma(n)} = \sigma(\bar{n})$.

Soit encore $n^* = \overline{k(y\ ,\ y - x)}$ l'adjoint de n .

Le théorème 1 dit alors que $\bar{n} - n^*$ opère de $H^{p,0}$ dans $H^{p,1}$.

Posons encore :

$$\sigma(n_1 \top n_2) = \sigma(n_1)\ \sigma(n_2)$$

Alors, le théorème 2 dit que $n_1 \circ n_2 - n_1 \top n_2$ opère de $H^{p,0}$ dans $H^{p,1}$.

CALDERÓN et ZYGMUND [1] énoncent ces théorèmes de la façon suivante (pour les travaux antérieurs traitant du cas $p = 2$, voir [2]).

THÉORÈME 3. - Soit Λ l'opérateur défini par :

$$\Lambda\varphi = \bar{\mathcal{F}}(|\xi|\ \mathcal{F}\varphi) \quad .$$

Sous les hypothèses des théorèmes 1 et 2, les opérateurs suivants opèrent de L^p dans lui-même :

(a). $[n\ ,\ \Lambda]$

(b). $(\bar{n} - n^*)\Lambda$ et $\Lambda(\bar{n} - n^*)$

(c). $(n_1 \circ n_2 - n_1 \top n_2)\Lambda$ et $\Lambda(n_1 \circ n_2 - n_1 \top n_2)$.

DÉMONSTRATION. - Puisque $|\xi| = \sum \xi_i \frac{\xi_i}{\|\xi\|}$,

$$\Lambda = c \sum \frac{\partial}{\partial x_i} r_i * \qquad (r_i = \text{v.p.}\frac{x_i}{|x|^{n+1}}) \quad ,$$

Λ opère donc de $H^{p,0}$ dans $H^{p,-1}$ et de $H^{p,1}$ dans $H^{p,0}$.

$$[n\ ;\ \Lambda]\varphi = c \sum [n(\frac{\partial r_i}{\partial x_i} * \varphi) - \frac{\partial r_i}{\partial x_i} * n\varphi] \quad .$$

D'après la formule de dérivation établie dans l'exposé n° 6 :

$$n\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_i} * \varphi\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} n(r_i * \varphi) - \theta\left(\frac{\partial k}{\partial x_i}\right)(r_i * \varphi)$$

$$[n , \Lambda] = c \sum \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} [n , r_i *] - \theta\left(\frac{\partial k}{\partial x_i}\right) \circ (r_i *) \right\} .$$

Le premier terme opère de L^p dans lui-même, d'après le corollaire du théorème 2, et le second aussi parce que $k \in \mathcal{B}^1(\Sigma)$, ce qui démontre (a).

Quant à (b) et (c), ce sont des conséquences directes des théorèmes 1 et 2, et des définitions.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - Singular integral operators and differential equations, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 901-921.

[2] MIKHLIN (S. G.). - Equations intégrales singulières [en russe], Uspekhi Mat. Nauk SSSR, N. S., t. 3(25), 1948, p. 29-112.