Séminaire Lelong.
Analyse

PIERRE LELONG

Singularités impropres des fonctions holomorphes et des fonctions plurisousharmoniques

Séminaire Lelong. Analyse, tome 1 (1957-1958), exp. n° 1, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1957-1958__1__A1_0>

SINGULARITÉS IMPROPRES DES FONCTIONS HOLOMORPHES ET DES FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES

par Pierre LELONG

On supposera que D est un domaine d'une variété analytique complexe W^n, E une partie fermée de D ayant la propriété :

(A). - L'ouvert $\Omega = D - E$ est un domaine connexe.

En fait les propriétés étudiées ici pour les fonctions holomorphes ou plurisousharmoniques seront des propriétés locales et l'on pourra se limiter au cas où D est un domaine de C^n ; l'ensemble E sera toujours un ensemble fermé polaire (donc un ensemble fermé de capacité nulle) dans l'espace réel R^{2n} ; un tel ensemble a la propriété (A).

1. Prolongement ; exemples.

Soit $L(D)$ une classe de fonctions vérifiant dans D une propriété locale. Prolonger $f \in L(\Omega)$ à D, c'est trouver $\tilde{f} \in L(D)$ dont la restriction à Ω soit f. Si tout $f \in L(\Omega)$ est prolongeable à D, et si le prolongement $\tilde{f}$ est unique, on dira que E est un ensemble singulier impropre pour la classe L dans Ω.

EXEMPLES.

1° $f(z)$ est holomorphe et uniforme dans $0 < |z| < r$ et l'on a: $\lim zf(z) = 0$ pour $z \to 0$; f est alors la restriction d'une $\tilde{f}$ holomorphe dans $|z| < r$.

2° $V(z)$ est sousharmonique et uniforme dans $0 < |z| < r$ et $V + \varepsilon \log r \to -\infty$ quand $r \to 0$, pour tout ε donné positif : V est la restriction de $\tilde{V}$ sousharmonique dans $|z| < r$.

3° $f(z_1, \dots, z_n)$ est holomorphe et uniforme dans le domaine Ω de C^n défini par $[\zeta = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in d,\ 0 < |z_n| < r]$ et l'on a

(1) $$\lim z_n f(\zeta, z_n) = 0$$

pour $z_n \longrightarrow 0$ et pour ζ fixé pris dans un ensemble $e \subset d$; on suppose que e n'est pas une partie d'un vrai sous-ensemble analytique de d. Alors f se prolonge, et d'une manière unique, par $\tilde{f}$ holomorphe dans $D = [\zeta \in d, |z_n| < r]$. La démonstration, comme pour 1°, utilise la série de Laurent en z_n.

$$f(\zeta, z_n) = f_1(\zeta, z_n) + \sum_1^{\infty} z_n^{-m} A_m(\zeta)$$

les A_m étant holomorphes dans d ; s'ils s'annulent sur e, ils s'annulent identiquement, et f se réduit à $f_1 = \tilde{f}$, série procédant selon les seules puissances positives de z_n.

4° $f(z_1, \dots, z_n)$, pour $n \geqslant 2$ est holomorphe dans $\Omega = D - E$ où E est un ensemble analytique de dimension complexe $p \leqslant n - 2$; f est la restriction d'une $\tilde{f}$ (unique) holomorphe dans D. Il est inutile de supposer f uniforme, le complémentaire de E dans tout domaine simplement connexe étant alors un domaine simplement connexe. L'énoncé classique ainsi obtenu sera généralisé plus loin.

2. Classes d'ensembles.

Rappelons qu'une fonction V à valeurs réelles $(-\infty \leq V < +\infty)$ définie sur une variété W^n analytique complexe y est dite plurisousharmonique si

a. V est semi-continue supérieurement, et $V \not\equiv -\infty$.

b. Pour tout image holomorphe $\tau(u)$ d'un domaine d du plan complexe C_u^1 dans W^n, $V[\tau(u)]$ est dans d soit une fonction sousharmonique, soit (identiquement) la constante $-\infty$. Si z_k sont des coordonnées locales sur W^n, il est suffisant d'exprimer b. pour les $\tau(u)$ données par $z_k = z_k^0 + a_k u$, où les a_k sont des constantes complexes arbitraires.

Pour qu'une fonction soit plurisousharmonique sur W^n, il faut et il suffit qu'elle le soit au voisinage de tout point de W^n.

Dans la suite nous ne considèrerons que des domaines de C^n. On a alors l'énoncé commode :

THÉORÈME 1. - Pour que V soit plurisousharmonique dans un domaine D de C^n, il faut et il suffit que V soit sousharmonique (dans D considéré comme un domaine de l'espace R^{2n} des coordonnées réelles) et que pour toute transformation $z = t(z')$ défini au voisinage de $z^0 \in D$ par :

$$z_k = z_k^0 + \sum t_k^i \, z_i'$$

$V[t(z')]$ <u>soit une fonction sousharmonique dans l'espace</u> $R^{2n}(z')$ <u>au voisinage de l'origine</u> $z' = 0$.

Nous distinguerons les classes suivantes d'ensembles dans un domaine D de $C^n = R^{2n}$.

(C_1). - <u>Les ensembles analytiques</u> : E est dit localement analytique dans D si tout point $a \in E$ appartient à un domaine ω_a tel que $E \cap \omega_a$ soit l'ensemble des zéros communs à des fonctions holomorphes dans ω_a (on peut les supposer en nombre fini) ; E est un ensemble analytique dans D si de plus il est fermé (relativement à D).

(C_2). - <u>Les ensembles polaires complexes</u> : E sera dit polaire complexe dans D (ou sur une variété W^n complexe) si tout point $a \in E$ appartient à un domaine ω_a tel que $(E \cap \omega_a) \subset \mathcal{E}_{[V_a(z_1,\dots,z_n)=-\infty]}$, V_a étant plurisousharmonique dans ω_a ($\mathcal{E}_{[\dots]}$ désigne l'ensemble des points défini par la propriété entre crochets). Un ensemble localement analytique est un ensemble polaire complexe.

(C_3). - <u>Les ensembles polaires</u> : E est dit polaire dans D (R^m-<u>polaire</u> si D est un domaine de R^m) si tout point $a \in E$ possède un voisinage ω_a , domaine dans lequel existe une fonction sousharmonique S_a telle que

$$(E \cap \omega_a) \subset \mathcal{E}_{[S_a(x) = -\infty]} .$$

Rappelons que si D est un domaine de R^m , il existe alors une fonction $S(x)$ sousharmonique dans tout l'espace R^m , telle qu'on ait $E \subset \mathcal{E}_{[S(x) = -\infty]}$. De plus une réunion dénombrable de tels ensembles est encore R^m-polaire (cf. [1]).

On obtient comme conséquence directe des définitions l'inclusion

PROPOSITION 1. - $(C_1) \subset (C_2) \subset (C_3)$ entre les classes définies plus haut. De plus :

PROPOSITION 2. - <u>Si</u> E <u>est une partie fermée et</u> R^{2n}-<u>polaire de</u> $D \subset C^n$, $\Omega = D - E$ <u>est connexe</u>.

Sinon Ω_1, étant une composante connexe de l'ouvert Ω, $D - \Omega_1$ contiendrait un ouvert. Soit V une fonction sousharmonique valant $-\infty$ sur E . Définissons $V_m = \sup(V , -m)$ dans Ω_1 , $V_m = -m$ dans $D - \Omega_1$; V_m est fonction sousharmonique dans D et décroissante de m . On a $V = \lim V_m$ dans Ω_1 , donc

$U = \lim V_m \not\equiv -\infty$ est une fonction sousharmonique dans D, et par suite : $D - \Omega_1 \subset \mathcal{E}_{[U = -\infty]}$ est R^{2n}-polaire et ne peut contenir aucun ouvert, d'où contradiction.

Il en résulte qu'un ensemble analytique ou un ensemble polaire complexe fermé E possèdent la propriété indiquée.

En remarquant qu'une image analytique F multiplie la distance de deux points pris sur un compact par un nombre qui demeure borné, on obtient :

THÉORÈME 2. - 1° L'image $e' = F(e)$ d'un ensemble fermé R^{2n}-polaire par une transformation analytique F non dégénérée est R^{2n}-polaire.

2° Si e' est fermé et R^{2n}-polaire $e_1 = F^{-1}(e')$ est R^{2n}-polaire.

3. Théorèmes de prolongement.

On rattachera les énoncés qui suivent à la propriété classique des fonctions sousharmoniques (cf. par exemple [1] et [5]) :

THÉORÈME 3_a. - Si E est une partie fermée, R^m-polaire, d'un domaine D de R^m, $L(\Omega)$ la classe des fonctions sousharmoniques uniformes dans $\Omega = D - E$, bornées supérieurement sur Ω au voisinage de tout point de E, toute $V \in L(\Omega)$ a un prolongement $\tilde{V}$ unique sousharmonique dans D. Autrement dit : un tel ensemble E est une singularité impropre des fonctions sousharmoniques bornées supérieurement. On peut construire $\tilde{V}$ par l'un ou l'autre des deux procédés suivants

(A) $$\tilde{V}(P) = \limsup V(M)\ , \quad M \to P \in E\ , \quad M \in \Omega$$

(B) $$\begin{cases} V_1(P) = a \text{ fini arbitraire pour } P \in E\ ;\quad V_1(P) = V(P)\ , \text{ si } P \in \Omega \\ \tilde{V}(P) = \lim\limits_{r=0} A[V_1, P, r] \end{cases}$$

$A[V_1, P, r]$ étant la moyenne de V_1 sur une boule $B(P, r)$, de centre P, de rayon r.

THÉORÈME 3_b. - Le résultat demeure si, au lieu de supposer V borné supérieurement au voisinage de chaque point de E, on suppose seulement l'existence d'une fonction $U(M)$ sousharmonique dans D telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$W_\varepsilon(M) = V(M) + \varepsilon\, U(M)$$

tende vers $-\infty$ quand $M \in \Omega$ tend vers un point P quelconque de E. On pourra choisir en particulier $U(M)$ potentiel d'une mesure portée par E. On établit à partir de la propriété précédente et du théorème 1 :

THÉORÈME 4. - Avec les hypothèses des théorèmes 3_a ou 3_b, si de plus V est plurisousharmonique ; il en est de même de $\tilde{V}$ obtenu par les procédés (A) ou (B).

La démonstration se fait à partir du théorème 1.

REMARQUE. - D'autre part on établit aisément en considérant la suite

$$V_q = \sup [V , - q]$$

que si V, est sousharmonique (ou plurisousharmonique) en tout point de D où $V \neq - \infty$, V est sousharmonique (ou plurisousharmonique) dans D.

THÉORÈME 5. - Si f est holomrphe et uniforme dans $\Omega = D - E$, où E est une partie fermée, R^{2n}-polaire, de D, f se prolonge par continuité en $\tilde{f}$ holomorphe dans D.

En effet on prolonge les parties réelles et imaginaires de f, et l'on observe que les relations de Cauchy sont vérifiées dans tout D.

Les ensembles R^{2n}-polaires fermés sont ainsi des singularités impropres des fonctions holomorphes bornées.

THÉORÈME de Rado. - Si f est définie et continue dans D, holomorphe en tout point où $f \neq 0$, f est holomorphe dans D. On peut même ne supposer au lieu de la continuité de f que la semi-continuité supérieure de $|f|$ dans D. En effet, ou bien $f \equiv 0$ dans D, ou bien $\log |f|$ est plurisousharmonique dans D (cf. Remarque précédente). Alors $\mathcal{E}_{[f=0]}$ est R^{2n}-polaire et de plus fermé comme complémentaire de l'ouvert $f \neq 0$; on applique ensuite le théorème 5.

4. Généralisations.

THÉORÈME 6. - Si f est définie et continue dans D, holomorphe en tout point où la valeur prise f n'appartient pas à un ensemble fermé plan polaire e, f est holomorphe dans D.

Le graphe G de $w = f(z_1 , \ldots , z_n)$ dans l'espace $C^{n+1} = C_w^1 \times C^n$ est fermé au-dessus de tout compact de D. On va supposer que f est holomorphe en tout point $z \in D$ pour lequel (z , w) n'appartient pas à un ensemble E fermé, C^{n+1}-polaire (au sens de complexe polaire dans C^{n+1}). Au voisinage de $(z^0 , w^0) \in G$,

E appartient aux infinis négatifs d'une fonction $U(z_1, \dots, z_n, w)$ plurisousharmonique, et alors ou bien on a $U(z_1, \dots, z_n, f) = \psi(z_1, \dots, z_n) \equiv -\infty$ au voisinage de z^0, ou bien ψ est plurisousharmonique. Dans ce dernier cas, l'ensemble $\psi = -\infty$ est R^{2n}-polaire fermé et comme f est holomorphe aux points de D où $\psi \neq -\infty$, le théorème 5 montre que f est holomorphe en z^0. D'autre part si E se projette sur C_w^1 selon un ensemble ne contenant aucun continu (c'est le cas si e est R^2-polaire), et si $\psi \equiv -\infty$ au voisinage de z^0, on a $f \equiv w^0$ pour z voisin de z^0.

En remplaçant l'hypothèse que E est C^{n+1}-polaire par l'hypothèse plus précise que E est un ensemble localement analytique dans le domaine $D \times C_w^1$, on obtient

THÉORÈME 7. - Si f est définie et continue dans D, holomorphe sauf peut-être aux points $z \in D$ pour lesquels le point $(z, w = f)$ du graphe G appartient à un ensemble localement analytique E, alors f est holomorphe dans D.

La démonstration du théorème 7 (cf. [5]) part de la remarque que l'une au moins des équations $F = 0$ qui définissent E au voisinage de (z^0, w^0) peut se mettre sous la forme $w = g(z)$, g holomorphe, sauf pour les z appartenant à un ensemble R^{2n}-polaire au voisinage de z^0. On étudie ensuite comme plus haut les deux cas où, au voisinage de z^0, $\psi(z_1, \dots, z_n) = F(z_1, \dots, z_n, f)$ vaut identiquement zéro, ou est une fonction holomorphe ne s'annulant que sur un sous-ensemble analytique ; on conclut en appliquant le théorème 5.

De même on démontre (cf. [5]) :

THÉORÈME 8. - Si f est continue dans D et si le graphe G appartient à un ensemble localement analytique, f est holomorphe dans D. Les théorèmes qui précèdent portent sur la classe des fonctions holomorphes bornées au voisinage de E. Certains peuvent être présentés sous une forme en apparence plus générale, en utilisant le théorème 3_b, au lieu du théorème 3_a, à condition de préciser la décroissance vers $-\infty$ d'une fonction sousharmonique au voisinage de E, quand on se rapproche de l'ensemble E.

REMARQUE. - Les résultats précédents étant locaux sont valables sur une variété W^n : on appellera ensemble polaire sur W^n un ensemble qui sur chaque carte locale a pour restriction un ensemble polaire (relativement aux coordonnées locales). Un ensemble fermé qui appartient à l'intersection de deux cartes et possède cette propriété sur l'une d'elles la possède aussi sur l'autre (cf. le théorème 2).

5. Singularités impropres des fonctions plurisousharmoniques.

On définira des classes d'ensembles fermés L_n (sur C^n), Λ_n (sur C^n ou sur W^n), cette dernière invariante par les homéomorphismes analytiques complexes. La classe L_n, par contre, est définie relativement à un système d'axes précisé de C^n (y compris l'ordre des variables $z_1, \dots, z_n$). Les ensembles E des classes L_n, Λ_n, sont des ensembles fermés, polaires, mais particulièrement minces ; ils sont des singularités impropres des fonctions analytiques et plurisousharmoniques (sans hypothèse relative au comportement de la fonction au voisinage de E) ; ils possèdent la propriété topologique suivante ; si D est simplement connexe, le complémentaire $\Omega = D - E$ est encore simplement connexe.

DÉFINITION 1. - Une partie fermée E d'un domaine D de C^n est dite de classe L_n si :

Pour $n = 1$, E est vide

Pour $n = 2$, $E \subset D \subset C^2(z_1, z_2)$ se projette sur $C^1(z_1)$ selon un ensemble e qui est R^2-polaire ; la section de E par un plan $C^1(z_2)$ est soit vide, soit R^2-polaire.

Pour $n > 2$: pour tout polycercle P d'adhérence compacte dans D et défini par des inégalités

$$P = \mathcal{E}[\,|z_k - z_k^0| < r_k\,,\quad 1 \leq k \leq n]$$

la projection e de $E \cap P$ sur $C^{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1})$ est R^{2n-2}-polaire ; la section de $E \cap P$ par un plan $C^1(z_n)$ est soit vide, soit R^2-polaire, soit le disque $|z_n - z_n^0| < r_n$ entier, cette dernière éventualité n'ayant lieu que pour un ensemble de ces plans projeté sur $C^{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1})$ selon un ensemble $e_1 \subset e$, e_1 étant de classe L_{n-1} dans le polycercle

$$p = \mathcal{E}[\,|z_j - z_j^0| < r_j\,,\quad 1 \leq j \leq n-1]$$

projection de P.

La définition donnée par $n = 2$ n'est que la particularisation du cas général. On notera $L_n(D)$ l'ensemble des parties de D, de classe L_n.

Si $D' \subset D$, et si $E \subset L_n(D)$, alors $E \subset L_n(D')$. Si $D' \supset D$, on a $E \subset L_n(D')$ si et seulement si E est encore une partie fermée de D. Pour que E, fermé dans D, appartienne à $L_n(D)$, il faut et il suffit qu'il existe un recouvrement de D par des $D_i \subset D$, avec $E_i = E \cap D_i \in L_n(D_i)$; la propriété est alors vérifiée pour tout recouvrement de D, par des domaines $D_i \subset D$.

Pour obtenir une classe invariante on énoncera

DÉFINITION 2.

1° Une partie fermée $E \subset D$ est de classe Λ_n, si pour tout recouvrement de D par des domaines $D_i \subset D$, les ensembles $E_i = E \cap D_i$ sont de $L_n(D_i)$ et si pour toute image analytique biunivoque T_i l'ensemble $T_i(E_i)$ est dans la classe $L_n[T(D_i)]$.

2° Une partie fermée E d'une variété W^n analytique complexe est dite de classe Λ_n si, $D \subset W^n$ étant un domaine possédant des coordonnées locales qui établissent une application F de D dans C^n, $F(E \cap D)$ est de classe Λ_n dans $F(D)$.

Les classes L_n, Λ_n sont formées d'ensembles polaires.

THÉORÈME 9. - Un ensemble analytique A de dimension $p \leq n-2$ sur une variété W^n est de classe Λ_n. On montre qu'il est de classe $L_n(D)$ dans tout domaine D de coordonnées locales en utilisant le théorème de plongement de Remmert-Stein.

THÉORÈME 10. - Un ensemble fermé dans un domaine D de C^n, réunion dénombrable d'ensembles de classe L_n (ou Λ_n) dans D est de classe L_n (ou Λ_n).

La démonstration, pour la classe L_n, se fait à partir des propriétés des ensembles polaires et de la définition 1. Si E appartient à $L_n(D)$, E est R^{2n}-polaire, fermé ; $\Omega = D - E$ est connexe. Mais on a de plus :

THÉORÈME 11. - Si D est simplement connexe et E une partie fermée de classe L_n (ou Λ_n) de D, $\Omega = D - E$ est un domaine simplement connexe.

Il suffit de faire la démonstration D étant un polycercle P : la propriété (immédiate pour $n = 1$, $n = 2$) se démontre par récurrence sur n. On remarque:

1° un lacet γ (ligne polygonale fermée) dans $\Omega = P - E \cap P$ est équivalent (par homotopie) dans Ω à un lacet γ' situé dans la base p et ne contenant aucun point de l'ensemble e.

2° d'après le théorème, admis pour $n-1$, γ' est homotope nul dans $p - e_1$.

3° cette réduction de γ' à zéro peut se faire par addition d'un nombre fini de lacets γ_i homotopes à zéro dans Ω, tout point M de E non projeté sur e, possèdant un voisinage (pour lequel on prend un polycercle $P(M)$ de centre M)