Séminaire de philosophie
et mathématiques

R. Apery

# Mathématique constructive

*Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, 1976, fascicule 1
« Mathématique constructive », , p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1976___1_A1_0>

© École normale supérieure – IREM Paris Nord – École centrale des arts et manufactures, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Séminaire de philosophie et mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

MATHEMATIQUE CONSTRUCTIVE

Conférence de R. APERY prononcée le 26 Avril 1976

"Qui veut tuer son chien l'accuse de la rage". Pour combattre une dissidence religieuse ou politique, un pouvoir commence toujours par la discréditer, en lui ôtant son caractère de doctrine soutenue par des chercheurs de bonne volonté attachés à leur conviction intime par des arguments solides pour présenter comme une entreprise criminelle (hérétique, associale) et vouée à la disparition.

Selon la caricature présentée par ses adversaires sous le nom d'intuitionisme la conception constructive détruirait une grande part de la mathématique classique, notamment l'axiome de choix et ses conséquences ; contrairement au caractère objectif de la science, elle adopterait comme critère de vérité l'intuition propre à chaque mathématicien ; enfin elle ne serait qu'une singularité historique, liée à une métaphysique particulière, et destinée à disparaitre.

Au défaut de convaincre, cette conférence peut dissiper des malentendus : nous montrerons que la conception constructive ne rejette rien de la mathématique classique ; nous ne traiterons pas de l'axiome de choix dont la discussion est étrangère au sujet; nous indiquerons les critères objectifs de preuve utilisés par les mathématiciens constructifs.

## Conception statique

Cette conception appelée souvent platonicienne, traite les êtres mathématiques comme des objets matériels que l'on possède. Les statiques supposent que tout proposition correcte est vraie ou fausse: c'est le principe du tiers exclu.

Selon le principe d'omniscience, ils croient légitime d'envoyer n'importe quelle question à une hypothétique fin des temps en "supposant le problème résolu" Ils assimilent le développement des mathématiques à celui de l'astronomie et des sciences naturelles: l'habileté des observateurs et les progrès de la technique permettent de découvrir des astres, des animaux, des végétaux, des minéraux, inconnus jadis, mais déjà présents sous l'oeil de Dieu.

L'application généralisée de ce principe exige de considérer comme une unité achevée tout ensemble infini, par exemple l'ensemble des entiers naturels: c'est la doctrine de l'infini actuel soutenue par Leibnitz et Cantor pour des raisons métaphysiques.

"Je suis tellement pour l'infini actuel qu'au lieu d'admettre que la"
"nature l'abhorre, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer la"
"perfection de son auteur. Ainsi, je crois qu'il n'y a aucune partie de la "
"matière qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée,"
"et par conséquent la moindre particule doit être considérée comme un monde"
"plein d'une infinité de créatures différentes" Leibnitz

"Sans un petit grain de métaphysique, il n'est pas possible, à mon avis."
"de fonder une science exacte. La métaphysique telle que la conçois est la"
"science de ce qui est, c'est à dire de ce qui existe, donc du monde tel qu'il"
"est en soi et pas tel qu'il nous apparait". Cantor

"La plus haute perfection de Dieu est la possibilité de créer un "
ensemble infini et son immense bonté le conduit à le créer". Cantor.

Les disciples de Cantor supposent en outre que la notion d'ensemble est simple primitive et que toute la mathématique en dérive.

Conception formaliste

Soucieux d'éliminer les antinomies issues du cantorisme et d'extirper toute trace de subjectivisme, les formalistes réduisent la mathématique à un simple jeu défini par des règles. Ils abandonnent dédaigneusement au psychologue l'activité mentale du mathématicien dont l'examen lui semble inutile pour juger la validité des résultats. L'adéquation au monde physique leur parait due à une "harmonie préétablie" ou à un "miracle". Il ne veut connaître des mathématiques, de la musique, de la littérature que leur formalisation écrite conservée par les bibliothèques.

Attachés sentimentalement au "paradis créé pour nous par Cantor", ils pratiquent le double langage : quand le profane croit qu'ils démontrent des vérités, ils se contentent d'établir la possibilité d'obtenir leurs résultats en respectant les règles d'un formel, de façon analogue au problème d'échecs énonçant : les blancs jouent et gagnent.

Leur hostilité à la liberté du sujet les poussent à la création d'un dieu mathématique à plusieurs personnes, qui tente d'être immortel en renouvelant périodiquement ses membres ; ce dieu révèle aux populations les bonnes définitions et les bonnes théories.

En face de ceux qui refusent la science au nom du bon sens de la poésie, de la religion, les formalistes rejettent comme démunis de sens les concepts d'espace, de temps, de liberté.

Mathématique et durée

Comme le platonicien, et contrairement au formaliste, le mathématicien constructif reconnait une certaine réalité aux objets mathématiques, mais cette réalité idéale les rend essentiellement différents des objets matériels. En particulier, la structure d'un objet dépend des moyens de la connaitre.

Le mathématicien constructif refuse les tabous philosophiques, car, sans esprit libre opérant dans le temps, la mathématique disparait.

Laissant de côté ce fameux "temps perdu qui ne se rattrape jamais" cher au moraliste, ce temps irréversible de l'historien (historien des hommes, mais aussi de la terre ou de l'univers), nous examinons un aspect du temps commun à la musique et à la mathématique, ces activités dont la liaison étonne les profanes.

Une statue, un tableau, un monument, essentiellement situés dans l'espace, se maintiennent par eux mêmes, les forces extérieures peuvent l'user ou le détruire mais ne sont pas nécessaires à leur maintien, l'examen de leurs diverses parties s'opère selon un ordre arbitraire et pendant une durée arbitraire.

Au contraire, la musique se situe essentiellement dans le temps, une mélodie n'est pas un ensemble, mais une suite de notes subtilement reliées ; contrairement à la persistence des monuments, la mélodie disparait ; pour réapparaître, elle doit être reproduite ; elle est conservée par des procédés de mémorisation artificiels (partitions musicales, disques). Nous connaissons les outils ou les dessins de nos ancêtres préhistoriques, nous ignorons leurs paroles ou éventuellement leurs chants.

De même, un raisonnement mathématique, essentiellement fragile, doit être refait pour être compris : un texte mathématique se lit la plume à la main.

Bien que la durée semble moins contraignante qu'en musique, l'examen d'un raisonnement mathématique exige d'embrasser simultanément à chaque étape les prémisses, la conclusion, la règle de raisonnement utilisée ; une compréhension authentique s'adresse à l'ensemble des articulations du raisonnement, de façon que le résultat apparaisse dû à une méthode applicable à d'autres problèmes et non à un heureux hasard.

Schématiquement l'activité mathématique comporte deux phases, caractérisées par la boutade : 5% d'inspiration, 95% de transpiration.

Dans la première phase, l'activité est mentale, subjective, indépendante du langage, étroitement liée à la durée intuitive. Malgré ses deux faiblesses (fugacité et incommunicabilité) cette phase constitue l'activité mathématique authentique.

Dans la seconde phase, le mathématicien note, formalise, traduit (partiellement) son intuition en termes communicables ; chacun peut examiner ses résultats devenus objectifs.

Cette durée qui se reproduit se retrouve en biologie ; si l'individu ne connait que le temps irréversible, l'espèce reproduit inlassablement le même cycle : conception, vie embryonnaire, naissance, croissance, mort. Les biologistes opposent le soma mortel de chacun de nous au germen potentiellement immortel qui maintient les caractères de l'espèce.

Dans un autre domaine, les corpuscules de la microphysique ont généralement une durée de vie inférieure à un millionème de seconde et ne sont connus que par des photos du comportement du corpuscule dans des chambres de Wilson.

L'exécution d'une œuvre musicale n'est pas rigoureusement identique aux exécutions précédentes, mais dépend de la personnalité du chef d'orchestre. De même la reproduction d'un raisonnement contient une part subjective irréductible ; en rappelant qu'un chien dévorant une oie emmagasine de la graisse de chien et non de la graisse d'oie, H. Poincaré illustrait la nécessité pour chacun d'incorporer à sa propre personnalité toute connaissance extérieure. Celui qui possède des mathématiques dont il ne peut comprendre l'articulation ne possède rien.

## Conception constructive

Comme Bourbaki (Ensembles ch. I §1 n°1) nous commençons les mathématiques par l'étude d'assemblages de signes extraits d'un alphabet ; un tel assemblage est une suite, non un ensemble. Tous les mathématiciens s'accordent sur la philosophie des signes : tout signe est indestructible, peut être reproduit sans changement ni usure autant de fois qu'on le désire, peut servir à construire des formules de longueur arbitraire.

Un texte mathématique se présente comme une suite d'arguments correctement déduits, non comme un ensemble d'affirmations en vrac.

Les assemblages construits avec un alphabet à un seul signe (noté | ) sont les nombres naturels. L'assemblage vide est noté 0, les assemblages |, ||, ||| sont notés respectivement 1, 2, 3. L'opération de concaténation applicable à des assemblages arbitraires permet de définir l'addition des nombres naturels.

Le type le plus élémentaire de question consiste à examiner si un polynôme donné à coefficients entiers peut s'annuler en substituant aux entiers naturels convenables.

Par exemple, a est pair si l'équation $2x = a$ à des solutions, a est premier si l'équation

$$(x+2)\ (y+2) = a$$

n'en a pas.

Examinons par exemple les équations ci-dessous

$$x^3 + y^3 + z^3 = 10 \qquad (1)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 30 \qquad (2)$$

$$x^3 + y^3 - z^3 = 30 \qquad (3)$$

$$x^3 + y^3 - z^3 = 31 \qquad (4)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 10^{1000000} \qquad (5)$$

Un examen rapide montre que l'équation (1) à des solutions et que l'équation (2) n'en a pas.

Un raisonnement plus profond permet de déduire l'impossibilité de l'équation (4) de l'impossibilité de

$$x^3 + y^3 - z^3 \equiv 31 \bmod 9$$

Par contre, personne ne connait la réponse aux questions (3) et (5).

Une attitude purement empiriste qui n'admettrait que l'examen d'objets déjà construits et les réponses aux questions déjà tranchées refuserait simultanément la question de l'existence de solution de (3) et (5).

L'attitude statique considère notre incapacité de répondre comme une infirmité humaine, mais admet une réponse "en soi".

L'attitude constructive est intermédiaire. L'examen de l'équation (5) exige un calcul très long, qui surpasse les capacités des ordinateurs les plus puissants, néanmoins, ce calcul s'appuye sur un procédé explicite à poursuivre en un nombre fini d'étapes. Le constructiviste n'hésitera pas, en appelant p la proposition : l'équation (5) admet au moins une solution à poser

p ou non -p

La divergence des attitudes apparait devant l'équation (3). Aucune méthode (connue) ne permet de montrer l'impossibilité de (3) (cette équation est résoluble en nombres p-adiques quel que soit p) ; on ne connait aucune solution de (3) ; une réponse à la question exigerait une infinité de vérifications.

Si le mathématicien constructif admet la possibilité de poursuivre un calcul en autant d'étapes que l'on désire, il refuse la possibilité qu'un tel calcul ait pu être poursuivi jusqu'à l'infini. Il admet l'infini potentiel et refuse l'infini actuel.

Si q signifie : l'équation (3) admet au moins une solution, le mathématicien constructif refuse la légitimité de la formule

q ou non -q

"Je proteste contre l'usage d'une grandeur infinie comme une chose achevée, ce qui n'est jamais permis en mathématique" Gauss

"Quand je parle de tous les nombres entiers je veux dire : tous les nombres entiers qu'on a inventés, et tous ceux que l'on pourra inventer un jour ... et c'est ce "que l'on pourra" qui est l'infini". H. Poincaré

Devant une question bien posée, par exemple l'existence de solutions d'une équation diophantienne nos connaissances permettent à priori trois réponses : oui, non, ne sait pas.

Les mathématiciens constructifs reconnaissent l'importance des ensembles mais considèrent que la notion n'est pas primitive et se ramifie : l'ensemble n'est pas un objer naturel à découvrir comme une pierre précieuse, mais doit être construit ; ses propriétés ne sont pas indépendantes des procédés de construction.

L'affirmation p non -p n'est légitime que si le problème de la vérité de p peut être obtenu par un procédé régulier.

Il serait inexact de considérer la logique constructive comme une logique à trois valeurs V, F, Σ. Une logique à valeurs associe à toute proposition une valeur définitive, les valeurs associées aux propositions composées $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$ dépendent exclusivement des valeurs de p,q. Au contraire, en logique constructive, les valeurs V,F sont définitivement acquises, mais le progrès des connaissances peut modifier la valeur Σ ; d'autre part les valeurs des propositions composées ci dessus ne dépend pas seulement des valeurs de p,q.

Subjectivisme - Objectivisme.

Toute connaissance suppose un sujet connaissant, toute science contient une part subjective ; les membres d'une communauté scientifique ont certains traits subjectifs communs ; aucune méthode ne peut convaincre de la valeur de la science ceux qui la refusent.

Par contre, il n'y a pas de science sans critères objectifs : les méthodes de preuve admises doivent être explicites, tout membre de la communauté scientifique doit, en principe, pouvoir constater si les preuves sont correctement appliquées.

La mathématique se développe dans la pensée du mathématicien, mais les écrits bien qu'ils aient perdu une partie importante de la pensée, sont les seuls moyens de conservation et de communication.

L'intuition indispensable au développement des mathématiques, est trop variable et trop imprécise pour constituer un critère de preuve.

Les raisons de pratiquer les mathématiques sont subjectives ; les raisons de préférer tel type de preuve à tel autre sont subjectives ; l'application correcte des critères de démonstration est objective.

En face des "statiques" qui veulent détruire l'intuition (on connait les résultats désastreux dans l'enseignement), Brouwer lui laisse une trop large part en considérant comme prouvé ce qui est intuitivement clair ; la clarté intuitive varie souvent d'un mathématicien à l'autre.

Nous préférons au vocable 'intuitionisme" utilisé par Brouwer, le vocable "constructivisme" qui évoque mieux les méthodes de preuves permises.

La logique constructive

La logique classique se compose de deux parties : la logique propositionnelle permet de bâtir des propositions composées à l'aide des connecteurs $\wedge, \neg$ selon certaines régles que nous pourrions expliciter certaines constructions bâties à l'aide de variables propositionnelles arbitraires sont des thèses. Aristote considérait une logique des prédicats à une place ; les progrès de la logique au XIXè siècle ont montré la nécessité de prédicats à plusieurs places. D'autre part le quantificateur $\forall$ a un sens facile à expliquer. Enfin, la logique classique utilise à titre d'abréviations

les signes $\vee$, $\Rightarrow$ $\exists$ dans le sens $\begin{cases} p \vee q & \text{signifie} \quad \neg(\neg p \wedge \neg q) \\ p \Rightarrow q & \text{signifie} \quad \neg(p \wedge \neg q) \\ \exists x px & \text{signifie} \quad \neg \forall x \ \neg px \end{cases}$

La logique constructive en plein accord avec les règles classiques reconnait comme vrai tout théorème acquis au moyen de la logique classique.

L'originalité de la logique constructive est l'introduction de connecteurs $\dot{\vee}$, $\dot{\Rightarrow}$ et du quantificateur $\dot{\exists}$ dans un sens intraduisible en logique classique. Il s'agit de poser d'autres questions et d'obtenir d'autres réponses.

C'est un faux problème de demander qui a raison du classique posant comme thèse

$$p \vee \neg p$$

et du constructif refusant $p \dot{\vee} \neg p$.

Deux quantificateurs différents malgré leurs propriétés communes n'ont aucune raison d'être identiques. De même l'existence constructive $\dot{\exists}$ qui suppose un procédé de construction est distincte de l'existence classique $\exists$ qui s'exprime par une double négation.

Fonctions récursives

La théorie, esquissée ci-dessus, ne devient mathématique que si nous précisons ce qu'on entend par procédé régulier.

Introduites par Skolem (1920) les fonctions récursives primitives sont définies par Gödel (1931) généralisées en fonctions récursives (générales) (Herbrand et Gödel), enfin Kleene montre la nécessité d'introduire les fonctions récursives partielles.

Turing et Post définissent la calculabilité à l'aide de machines standard.

Church définit la $\lambda$ - définissabilité. Enfin Markoff étudie la notion d'algorithme normal.

Malgré la diversité des points de départ, ces diverses définitions de la calculabilité ont été démontrées équivalentes. La thèse de Church affirme que tout procédé de calcul équivaut à l'un des procédés ci-dessus (et par conséquent à tous).

Une des définitions les plus simples considère une machine théorique constituée d'un nombre illimité de registres susceptibles de contenir des nombres arbitrairement grands : le nombre de registres et les entiers qu'ils contiennent ne sont infinis que potentiellement c'est-à-dire que l'on admet la possibilité d'adjoindre de nouveaux registres ou d'augmenter la capacité de ce qui existe et non la possibilité d'une infinité effective de registres de capacité infinie. Comme une machine matérielle n'admet qu'un nombre fini de registres et que leur capacité est limitée, le point de vue exposé ici diffère de celui de l'informaticien.

Le procédé régulier est défini par une suite d'instructions.

La possibilité de définir les fonctions calculables se heurtait à un paradoxe (on les dénombre, puis par un procédé diagonal, on fabrique une fonction qui est calculable sans appartenir à la suite des fonctions calculables !).

La réponse tient à l'absence de méthode pour reconnaitre si le calcul défini par une suite d'instructions se termine en un nombre fini d'étapes ou se poursuit indéfiniment : ou bien on se limite à une classe ample mais incomplète de fonctions calculables (les fonctions récursives primitives) définies à partir de quelques fonctions de base par composition ou schéma de récursion, ou bien on considère les fonctions récursives générales en introduisant la minimisation et on ne sait pas distinguer les fonctions totales des fonctions partielles.

Dans la conception statique, les fonctions partielles ne jouent qu'un rôle accessoire; au lieu de parler d'une fonction partielle de E vers F on peut parler d'une fonction d'une partie E' de E vers F.

Au contraire, les mathématiques constructives utilisent les fonctions partielles de façon essentielle. Pour un élément a de E c'est simultanément qu'on examine la valeur de f(a) et le fait qu'elle soit ou non définie en a. Nous notons !f(a) le fait que f soit définie en a.

Parties de $\mathbb{N}$

Les parties de $\mathbb{N}$ peuvent être définies de plusieurs façons, ce que voyait Brouwer en distinguant "spread" et "species".

Ensemble strictement fini, cas paticulier $\{1,\ldots,n\}$.
On suppose que tous les éléments de l'ensemble sont effectivement nommés ou peuvent l'être par un procédé régulier.
Tout problème élémentaire peut être supposé résolu (l'ensemble est-il vide ? dans le cas contraire, déterminer son cardinal, son minimum, son maximum). L'intersection et la réunion de deux ensembles strictement finis sont strictement finies.

La correspondance standard qui associe à l'ensemble $\{a_1, a_2 \ldots a_r\}$, l'entier $2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_r}$ ramène l'étude des ensembles finis d'entiers à l'étude des entiers.

Ensemble décidable (ou récursif)

On associe à tout n un procédé régulier T(n) qui permet quand n est donné de trancher si n appartient ou non à l'ensemble E.

Il n'est pas toujours possible : de distinguer si E est vide, de distinguer si E est fini, de distinguer si deux ensembles E, E' sont les mêmes E peut être fini sans être strictement fini.

Par contre, avec deux ensembles décidables on peut former la réunion, l'intersection, la différence symétrique ; le complémentaire d'un ensemble décidable est décidable.

Si E est non vide, on peut déterminer son minimum.

Si E est majoré, on peut le considérer comme strictement fini.

Ensemble énumérable (récursivement énumérable)

On considère l'image d'une application calculable $n \mapsto f(n)$. Une telle image n'est jamais vide. Par contre, il n'est pas toujours possible de déterminer son minimum.

On appelle suite fugitive une suite d'entiers $u_n$ telle que

$$\forall n \quad u_n = 0 \vee u_n = 1$$

pour tous les $n$ où $u_n$ a été calculée, $u_n$ est nulle mais la proposition $\forall n \; u_n = 0$ a la valeur $\Sigma$.

D'importantes conjectures (Fermat, Riemann, Goldbach, quatre couleurs, etc) signifient qu'une suite, fugitive dans l'état de nos connaissances, est en fait nulle.

Un ensemble décidable non vide est énumérable ainsi que son complémentaire. Un ensemble énumérable est décidable si son complémentaire est vide ou décidable.

Equations diophantiennes : si $P(x_1, x_2 \dots x_m)$ désigne un polynôme, peut-on décider le problème

$$\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_m \; P = 0$$

La réponse, élémentaire pour $P$ du premier degré, se déduit du principe de Hasse pour $P$ du second degré. Pour les polynômes à deux variables : la réponse (non constructive) date de Siegel (1929), l'ensemble des points à coordonnées entières d'une courbe de genre > 0 est fini (mais pas strictement fini!).

Des résultats constructifs ont été obtenus ces dernières années : Baker et Coates ont montré que l'ensemble des points à coordonnées entières des courbes de genre 1 est strictement fini. Les majorations des solutions paraissent énormes, mais ont permis par exemple de montrer que

$$y^2 = x^3 - 28 \Longrightarrow x \in \{4, 8, 37\}$$

Dans la direction opposée, on a montré l'impossibilité de décider un problème diophantien à un grand nombre de variables (Matijasevich).

On voit l'aspect artificiel de la distinction qui placerait la première réponse en mathématique et la seconde en métamathématique. Il reste une zone non encore résolue de recherche vivante entre les résultats de Baker et ceux de Matijasevich.

Le continu

Trois illusions contribuent à l'adoption du continu classique : le continu donné par la physique, le continu donné par l'intuition, le continu défini par Cauchy, Weierstrass, Dedekind ou Cantor.

Une grandeur physique n'est jamais un nombre réel, mais présente une certaine indétermination ; par exemple, il n'y a pas de sens à définir la longueur d'une règle avec une erreur inférieure au rayon de l'atome.

La droite réelle a des propriétés qui choquent l'intuition : il existe un ouvert de mesure $< \varepsilon$ contenant tous les rationnels contrairement aux apparences.

Le continu défini par les coupures de Dedekind ou par les suites de Cauchy est insuffisamment défini, puisque d'après le théorème de Cohen, l'hypothèse du continu ou sa négation peut être ajoutée comme axiome sans créer de contradiction.

A la place du continu "classique" nous présentons le continu constructif : la notion primitive n'est pas le réel, mais le duplexe constitué par une suite de rationnels et un régulateur de convergence.

Deux duplexes sont équivalents (en gros) s'ils définissent le même réel.

<u>Nombres réels.</u>

Un duplexe est constitué par une suite de rationnels et un régulateur de convergence c'est-à-dire une suite u(n) de rationnels et une suite c(n) d'entiers tels que

$$m,m' \geqslant c(n) \Longrightarrow |u(m) - u(m')| < 2^{-n}$$

On définit $x = y$, $x > y$, $x \geqslant y$.
Il n'est pas exact que

$$(x \geqslant 0) \vee (x < 0)$$

$$(x \geqslant 0) \Rightarrow (x > 0) \vee (x = 0)$$

$$(x = 0) \vee (x \neq 0)$$

On définit la valeur absolue d'un duplexe, le maximum, le minimum, la somme, la différence, le produit de deux duplexes et pour tout duplexe non nul son inverse. Ces opérations ont toutes les propriétés classiques.

La notion de duplexe équivaut à celle de suite contractante d'intervalles rationnels et à celle de coupure constructive.

Une suite contractante d'intervalles est définie par une suite d'intervalle $u_n$, $v_n$ tels que

$$\forall n \quad u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$$

et

$$\forall n \; \exists m \quad |v_m - u_m| < 2^{-n}$$

Une coupure constructive est définie par une fonction $f$ (éventuellement partielle) de $\mathbb{Q}$ vers $\{0,1\}$ telle que

$$f(a) = 1 \wedge b < a \Longrightarrow f(b) = 1 \qquad (1)$$

$$f(a) = 0 \wedge b > a \Longrightarrow f(b) = 0 \qquad (2)$$

$$a \neq b \Longrightarrow\ !f(a) \vee\ !f(b) \qquad (3)$$

$$!f(a) \Longrightarrow \exists bd \quad b < a < d \wedge f(b) = f(a) = f(d) \qquad (4)$$

$$\exists ab \quad f(a) = 1 \wedge f(b) = 0 \qquad (5)$$

Si on avait remplacé la condition (3) par l'hypothèse, a priori plus simple que tout rationnel est classé, l'ensemble des coupures n'aurait pas été un groupe pour l'addition.

Specker (1949) a montré l'existence d'une suite monotone croissante de rationnels bornée supérieurement n'admettant pas de limite (constructive).

Zaslavsky a renforcé le théorème en montrant l'existence d'une suite de rationnels $u_n$ et d'une application $\varphi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$ telle que

$$\forall n \quad 0 \leqslant u_n < u_{n+1}$$

$$\forall n \quad 0 \leqslant u_n < 1$$

$$\forall x \quad \varphi(x) < x$$

$$u_n \leqslant x \Longrightarrow u_n \leqslant \varphi(x)$$

Autrement dit à toute majoration de $u_n$, on peut associer une majoration rationnelle plus petite.

## Fonction constructive de variable réelle

On appelle fonction constructive toute fonction (éventuellement partielle) définie sur les duplexes telle que

$$\forall xy \quad (!f(x) \wedge x = y) \Longrightarrow\ !f(y) \wedge (f(x) = f(y))$$

Toute fonction constructive est continue en tout point où elle est définie.

Les fonctions de variable réelle ont en analyse constructive des propriétés différentes de l'analyse classique.

Une fonction continue sur un segment n'est pas nécessairement bornée, peut être bornée sans atteindre sa borne, n'est pas nécessairement uniformément continue ; elle peut être négative à une extrémité, positive à l'autre sans s'annuler. Une fonction continue sur un segment dérivable à l'intérieur, peut ne pas avoir de point où la dérivée est nulle.

Un recouvrement d'un segment par des intervalles peut être tel que toute somme d'un nombre fini d'intervalles est $< \varepsilon$. Par contre Zaslavsky et Ceitin ont montré si les longueurs des intervalles convergent (constructivement) la somme des longueurs est supérieure à celle du segment recouvert, ce qui permet de construire constructivement la théorie de la mesure de Lebesgue.

Les fonctions à variation bornée, les fonctions représentables comme différence de fonctions croissantes, les fonctions uniformément continues à variation faiblement bornée, les fonctions à variation faiblement bornée constituent des classes dont chacune contient strictement la précédente. Contrairement aux autres, la première classe ne constitue pas un espace vectoriel

Nombres irrationnels et transcendants

Dès 1899, Borel insiste sur le caractère non constructif des démonstrations d'irrationalité et de transcendance. Il donne la première mesure de transcendance de e. Depuis, les spécialistes des nombres irrationnels et transcendants n'omettent jamais d'indiquer une mesure de transcendance ou d'irrationalité. Par exemple, on ne se contente pas de dire que $e^{\pi}$ est irrationnel, mais on précise que

$$\left|e^{\pi}-\frac{p}{q}\right| > q^{-c \log \log q}$$

Pour presque tout $\alpha > 1$, les $\alpha^n$ sont bien répartis. Néanmoins un problème important de la théorie des nombres est de nommer un $\alpha$ tel que les $\alpha^n$ soient bien répartis. Dans une optique non constructive le problème ne peut même pas être posé.

MATHEMATIQUE CONSTRUCTIVE

Bibliographie


| | |
|---|---|
| AZRA-JAULIN | Récursivité |
| BISHOP | Foundations of constructive analysis |
| BOOLOS-JEFFREY | Computability and logic |
| DAVIS | Computability and unsolvability |
| GOODSTEIN | Recursive analysis |
| HERMES | Aufzählbarkeit. Enstcheidbarkeit. Berechenbarkeit |
| HEYTING | Les fondements des mathématiques |
| JONES | Computability theory |
| KLEENE | Introduction to metamathematics |
| KLEENE-VESLEY | The foundations of intuitionistic mathematicies |
| LOECKX | Computability et decidability |
| LORENZEN | Einführung in die operative Logik und Mathematik |
| MALCEV | Algorithms and recursive functions |
| MARKOV | Theory of algorithms |
| OUSPENSKY | Leçons sur les fonctions calculables |
| PETER | Recursive functions |
| POINCARE | La science et l'hypothèse |
| POINCARE | La valeur de la science |
| POINCARE | Science et méthode |
| ROGERS | Theory of recursive functions and effective computability |
| SHANIN | Constructive real numbers and constructi function spaces |
| WEYL | Das Kontinuum |
| YESUHARA | Recursive functions and logic |