Gerhard Heinzmann

# Poincaré et le concept de prédicativité

*Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, 1985, fascicule 8
« Poincaré et le concept de prédicativité », , p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1985___8_A1_0>

# Poincaré et le concept de prédicativité*

Gerhard Heinzmann+

I. Des antinomies au pragmatisme philosophique de Poincaré. - II. La première définition (P1) de la prédicativité. - III. La deuxième définition (P2) et son rapport avec P1.

I. Dans ces Principles of Mathematics Russell détermine le concept de classe à l'aide de fonctions propositionnelles: les éléments qui rendent vrais une fonction propositionnelle forment une classe:

(1) $\bigwedge X(X \in E \longleftrightarrow \varphi(X))$.

Remarquons que E est un nom propre pour un objet abstrait et n'est par conséquent pas éliminable par une configuration du type prédicat/individu. La formule (1) n'est pas une définition nominale de E, bien que celle -ci soit le seul type de définition reçevable par le programme réductionniste du logicisme. Mais - il est bien connu - le caractère non-nominale n'est pas le seul défaut de la compréhension'naive': elle induit pour $\varphi(X) \leftrightharpoons X \notin X$ l'antinomie logique qui porte le nom de Russell.

Selon Poincaré les antinomies sont une conséquence nécessaire de la méthode erronée du réalisme conceptuel qui fait une usurpation de l'intuition à l'égard des entités abstraites. Pour expliciter cette thèse, je me propose d'examiner l'interprétation de Poincaré du concept de la définition explicite d'un ensemble.

De telles définitions se font d'après les derniers écrits de Poincaré selon deux processus:" soit par genus proximum et differentiam

*Ce texte, lu le 9 décembre 1985 au Séminaire de Philosophie et Mathématiques organisé par Maurice Caveing, Maurice Loi et René Thom à l'Ecole Normale Supérieure, Paris, est un abrégé de mon livre Entre intuition et Analyse. Poincaré et le concept de prédicativité, Paris (A. Blanchard) 1985.

+ Fachbereich 5.1, Philosophie, Universität des Saarlandes, D-6600 Saarbrücken.

_specificam_ soit par construction"[1]. Ces deux méthodes correspondent à la dispute entre réalistes et nominalistes, reprise par Poincaré en termes de 'cantoriens' et 'pragmatistes', qui défendent les uns un point de vue de la compréhension, les autres un point de vue de l'extension. Poincaré range les'logicistes'- ils appartiennent à l'école de Peano-Russell, mais également à l'école de Hilbert - du côté des cantoriens, tandis qu'il prend lui-même position pour les pragmatistes.

Les pragmatistes ne sont pas des réalistes. Ils prohibent, pour ainsi dire, de lire l'arbre porphyrien de haut en bas, c'est-à-dire de considérer le "genre...antérieur à l'espèce"[2] et de s'arrêter à un niveau abstrait. Ainsi, une définition qui ne définit "non pas un individu, mais un genre tout entier"[3] est incomplète; car l'individuation ne découle pas logiquement de l'unité abstraite:

> "La connaissance du genre ne...fait pas connaître tous ses individus, elle...donne seulement la possibilité de les construire tous, ou plutôt d'en construire autant que vous voudrez. Ils n'existeront qu'après qu'ils auront été construits, c'est-à-dire après qu'ils auront été définis."[4]

Si le vocabulaire de Poincaré est traditionnel, le sens qu'il lui donne l'est moins: l'extension et l'intension n'apparaissent plus comme métaprédicats de prédicats. Car de définir un genre à l'aide d'un prédicat - comme procèdent les adhérents du point de vue de la compréhension - semble être _eo ipso_ un mode intensionnel. Par contre, l'extension ne concerne pas un prédicat, mais un mode de construction.

1 _Poincaré 1912_, p. 89.
2 _Poincaré 1906_, p. 317.
3 _Poincaré 1912_, p. 89.
4 _Poincaré 1912_, p. 91.

En se limitant à définir un ensemble en tant qu'entité abstraite , on se prive de l'aspect constructif de la définition , lequel - pour les cantoriens - est une "restriction artificielle" .

Mais, pour le pragmatiste, une définition directe formée selon la méthode inversée des cantoriens peut être 'corrigée' en la complétant par une deuxième partie qui remplace l'hypostase d'une entité abstraite servant en tant que référence du genre: il faut "sous-entendre l'ensemble des individus qui satisfont à la définition"[5]. Puisque la généralité est du point de vue de l'extension une universalité individuelle ou numérique, il est nécessaire qu'on énonce cette seconde partie de la définition, sans quoi une proposition au sujet de tous les objets d'un ensemble "n'aurait aucun sens" et "l'objet serait impensable"[6] L'expression 'aucun sens' prend dans un article de 1912 même une valeur philosophique. Pour les pragmatistes, le sens d'une définition, c'est-à-dire l'existence des instances de vérifications, devient alors avec la non-contradiction le critère d'admissibilité d'une définition. Il introduit,pour ainsi dire, une restriction 'par le bas'. Voici maintenant la présentation d'une définition complète selon les pragmatistes:

> "La première partie de la définition, commune à tous les éléments de l'ensemble, nous apprendra à les distinguer des éléments qui sont étrangers à cet ensemble; ce sera la définition de l'ensemble du genre; mais ce genre ne préexiste pas ici à ses éléments; la seconde partie nous apprendra à distinguer les uns des autres des différents éléments de l'ensemble; ce sera l'indication de la differentia specifica." [7]

Si le pragmatisme de Poincaré a toujours été associé à une philosophie utilitaire ou à une philosophie pragmatique en ce sens qu'un technicien utilise des résultats tout en attendant la démonstration de leur non-contradiction, il deviendra plus tard, avec les formulations de 1912, un intuitionnisme de principe: les considérations de non-contradiction

5 Poincaré 1912, p. 89.
6 Cf. Poincaré 1909b, p. 27.
7 Poincaré 1909b, p. 27.

/-4

ne sont plus suffisantes si l'on ne peut indiquer en même temps un processus de vérification, c'est-à-dire un modèle concret, une construction qui repose sur l'intuition.

Cependant, par rapport à Brouwer, on pourrait étendre la dénommination 'semi-intuitionnisme' à la philosophie poincaréienne: l'adjonction 'semi' marquerait alors la manière particulière dont elle conçoit la relation entre intuition et langage. Ce dernier est pour Brouwer qu'un moyen auxiliaire, tandis que Poincaré donne à l'identification pragmatique de l'ontologie à l'épistémologie une tournure langagière: pour le pragmatiste un individu "n'existe que quand il est pensé... d'un sujet pensant" et quand il est susceptible d'être défini "en un nombre fini de mots". Et un concept qui n'en est pas susceptible n'est pas admis parce qu'il ne peut être pensé [8]. Il semble alors cohérent de dire avec Heyting que la définissabilité en un nombre fini de mots signifie (dans un sens textuel:'est un signe pour') la constructibilité finie [9]. Tous les éléments d'un genre doivent bénéficier d'une constructibilité finie. Cette interprétation trouve une confirmation lorsque Poincaré infirme une affirmation de Schoenflies qui dissocie justement la définissabilité finie de la construction. L'ensemble des fonctions constantes en est l'exemple:

> "Quand on dit 'une fonction constante', remarque Poincaré, on a une formule d'un nombre fini de mots et qui s'applique à une infinité de fonctions; mais qui ne les définit pas... Il n'est donc pas exact de dire que cette formule définit en un nombre fini de mots un ensemble de fonctions". [10]

---

8 Poincaré 1912, p. 94.
9 Heyting 1934, p. 4.
10 Poincaré 1909a, p. 114/115.

Puisque la définition d'un ensemble nécessite la 'connaissance' de tous ses individus, la définition d'un ensemble infini au sens actuel dans une même formule comportant un nombre fini de mots est impossible:
Du point de vue de l'extension, l'infini est un devenir et jamais une totalité close. Borel donnera avec sa distinction entre l'ensemble dénombrable et son sous-ensemble effectivement énumérable une première précision de la conception vague du 'on pourra énumérer' de Poincaré: pour Borel, un ensemble est seulement admissible, s'il est effectivement énumérable, c'est-à-dire, si on peut indiquer "au moyen d'un nombre fini de mots, un procédé sûr pour attribuer sans ambiguïté un rang déterminé à chacun de ses éléments"[11]. Nous savons aujourd'hui que la restriction sur le seul concept de récursivité générale qui est sans doute visé par Borel, ne conduit malheureusement pas très loin: généralement, un prédicat défini sur les nombre naturels à l'aide des quantificateurs non-restreints n'appartient déjà plus à la classe des prédicats récursifs. Ceci et le fait d'une possible interprétation constructive de l'arithmétique élémentaire classique suggèrent à élargir le pragmatisme au sens de Poincaré: il semble souhaitable d' admettre la totalité des nombres naturels et de différencier les prédicats récursivement non-décidables selon la complexité de leur non-décidabilité.

II. Passons maintenant à la tâche de faire valoir l'interprétation de la philosophie pragmatique pour la genèse des définitions poincaréiennes de la prédicativité.

C'était Russell qui a introduit en premier les termes 'prédicatif' et 'non-prédicatif'[12] pour fixer la différence de deux sortes de fonctions propositionnelles: celles qui déterminent et celles qui - comme $\varphi(X) \leftrightharpoons X \notin X$ - ne déterminent pas une classe. Il appelle les premières 'prédicatives' et les deuxièmes 'non-prédicatives'. Pour parer au phénomène des définitions

11 Borel 1908 a, p. 446/447.
12 Russell 1906a, p. 34.

non-prédicatives Russell propose deux manières de réagir: ou bien on adopte la théorie que les fonctions déterminent - au moins en règle général - des classes et, par la suite, on indique un principe pour exclure les définitions non-prédicatives; - ce type de solution sera plus tard représenté par la théorie ramifiée des types -; ou bien on préfère une solution radicale et on renonce à toute classe en tant qu'entité. A cette exigence obéit la 'no-classes-theory' qui, d'abord, trouve les faveurs de Russell.

En ce moment, Poincaré semble donc pouvoir triompher de Russell qui doit soumettre son illusion 'platonicienne' au 'rasoir' d'Ockham: si les positions du pragmatiste et du cantorien sont alternatives, les antinomies obligent de restreindre l'universalité de la variable sur les individus qui seuls sont encore à considérer comme des entités. Par contre, les classes ne constituent que des 'façons de parler'.

Poincaré voit la faute immédiate des définitions non-prédicatives dans un cercle vicieux. Voici sa première définition de la prédicativité:
P1: La définition d'un ensemble E est prédicative, si elle peut être formée "sans introduire la notion de l'ensemble E lui-même. Sans quoi la définition de E contiendrait un cercle vicieux; on ne peut pas définir E par l'ensemble E lui-même"[13]
- une formulation qui mène directement au célèbre principe du cercle vicieux de Russell:
"Tout ce qui contient une variable apparente ne doit pas être une... des valeurs possible de cette variable"[14]. "Le cas important de ce principe peut être énoncé moins exactement comme suit: 'Tout ce qui enveloppe tous ne peut pas être un de ces tous' "[15].
Ce principe est célèbre, puisque Russell a réussi de développer une théorie qui le respecte: la théorie ramifiée des types. Chez Poincaré on ne trouve rien de comparable: il croit que sa théorie sous-jacente d'un pragmatisme

13 Poincaré 1906, p. 307.
14 Russell 1906b, p. 640.
15 Ibid.

constructif le met - disons naturellement - à l'abri des fautes de définitions. Pour lui, les antinomies ne sont que le signe de l'erreur des cantoriens, à savoir de considérer une totalité comme une donnée indépendante des ses individus. Mais ceci constitue un procédé habituel et jusqu'à présent non suspect de la théorie des ensembles de Zermelo, utilisé par exemple dans la définition d'une intersection des éléments de l'ensemble des parties d'un ensemble M:

soit $B_i \subseteq M$ et $R \subseteq \mathcal{P}(M)$ tel que $\bigwedge B_i (B_i \in R \leftrightarrow \varphi(B_i))$;

$I \leftrightharpoons \bigcap B_i \, [B_i \in R]$, donc $I \in \mathcal{P}(M)$. On a:

$$\bigwedge (x \; (x \in I \leftrightarrow \bigwedge B_i ( \varphi \; (B_i) \longrightarrow \; x \in B_i)).$$

Pour déterminer I, il faut tester, si $\varphi$ (I) et donc déjà connaître I. La définition est alors non-prédicative selon P1.

Aussitôt après la publication de sa critique, Poincaré apprend l'inconvénient que devait provoquer une restriction aux définitions prédicatives (P1), non seulement pour la théorie des ensembles, mais surtout pour l'Analyse, donc pour les 'vraies mathématiques' qui cependant, selon Poincaré, sont restées hors de portée des difficultées concernant les fondements. Car, pour démontrer le théorème fondamental de l'algèbre selon lequel, dans les nombres complexes, une équation algébrique F=0 a toujours une racine, Cauchy utilise la définition proscrite d'une intersection ou d'un élément minimal d'un ensemble[16]: on montre que F atteint l'élément minimal qui ne peut être que zero; en symboles:

$$\bigvee E \bigwedge X (X \in E \longleftrightarrow \bigwedge Y ( \bigvee Z (Y = | F(Z)|) \longrightarrow X \in Y))$$

(Y,X,Z sont des variables pour des ensembles de nombres rationnels possédant la propriété de Dedekind)

L'élément E est alors défini par rapport à toutes les valeurs Y de F dont il fait lui-même partie. La définition de E est non-prédicative au sens de P1.

16 Cf. Zermelo 1908, p. 117.

/- 8

Dès lors, il semble bien qu'on ne peut rejeter " l'emploi des définitions non-prédicatives sans rejeter une démonstration admise par tous les mathématiciens".[17] Mais, en vérité, on n'est nullement obligé d'admettre une telle conséquence funeste. Poincaré l'explique dans une mise au point de l'application de P1:

Premièrement, il suffit parfois de transcrire les définitions existantes pour voir que leur sens correspond à l'exigence de P1, c'est-à-dire il suffit de remplacer dans le cas concret la définition non-prédicative par une définition prédicative. Ceci est facile pour le théorème fondamental: on limite d'abord F aux valeurs rationnelles complexes. Le minimum E des valeurs Y' de $|F(X)|$ est alors en général non-rationnel ( on ne montre qu'ensuite qu'il coïncide avec zéro) et ne fait donc pas partie de la totalité des valeurs Y' de $|F(X)|$.

Deuxièmement, et plus généralement, cet exemple donne une précision importante sur l'interprétation poincaréienne de P1 que nous désignerons par P1*a* :

P1a: Une définition d'un ensemble E qui utilise dans le définissant une totalité dont elle fait partie, est néanmoins prédicative, si E ne ne fait pas partie de cette totalité "en vertu de sa définition, mais par suite d'une démonstration postérieure à la fois à la définition de cette totalité et à celle de E"[18].

Dans la modification précédente du théorème fondamental de l'algèbre, l' élément minimal E ne fait pas partie de la totalité des valeurs Y' en vertu de sa définition, puisqu'il est en général non-rationnel et puisque la démonstration montrant qu'il est égal à zero, est postérieure à la fois à la définition des Y' et à celle de E.

17 Poincaré 1909a, p. 118.
18 Ibid., p. 119.

La prédicativité selon P1a n'est pas une notion absolue, mais plutôt relative à l'univers considéré . Lorsque celui-ci est donné dans sa totalité extensive indépendamment de la définition en question, cette définition n' est plus circulaire même si elle contient un quantificateur portant sur la totalité à laquelle appartient le défini . Strictement parlant, elle n'est qu'une description équivalente du défini dont l'existence est déjà assurée.
Une telle définition est dans un certain sens 'stérile': elle n' introduit pas l'existence d'un nouvel élément. Inversemement, dès qu'une définition d'une même forme (un quantificateur universel porte sur une totalité qui enveloppe le défini) implicite un postulat d'existence du défini, on la suspectera au point de vue pragmatique d'un vice formel de circularité, c'est-à-dire d'un vice devenu indépendant de sa ratio cognoscendi: l'antinomie effective

P1 semblait trop restrictive pour le maintien des résultats importants en Analyse. Maintenant par contre, Zermelo estime que P1a est si libérale qu'elle permet même de justifier à l'encontre de son auteur des formations d'intersection refusées par lui. En effet, La transformation de la définition de l'élément minimal d'un ensemble de valeurs d'une fonction algébrique en une définition prédicative sous l'exploitation de P1a se laisse transcrire pour l'élément minimal de sous-ensembles quel conques. Ainsi on peut paraphraser Poincaré pour l'exemple de l'intersection comme suit:

> 'Si nous envisageons un ensemble R d'ensembles $B_i$ de M on peut démontrer que cet ensemble possède une partie commune $I$ ; cette partie commune est définie après l'ensemble $R$; et il n'y a pas de pétition de principe puisque $I$ ne fait pas en général partie de $R$. Dans certains cas particuliers, il n'y a pas non plus de pétition de principe puisque $I$ ne fait pas partie de $R$ en vertu de sa définition, mais par suite d'une démonstration postérieure à la fois à la définition de $R$ et à celle de $I$ '." 19

19 Zermelo 1909, p. 193 ; j'ai adapté les symboles à l'exemple donné plus haut.

Les publications de Poincaré ne contiennent aucune réaction explicite à cet argument de Zermelo. Néanmoins, l'introduction d'une nouvelle définition de la prédicativité présentée à peine deux mois après la parution de l'article de Zermelo, pourrait être lu comme une confirmation implicite, relativisé pourtant par le fait que Poincaré maintient également P1.

Or, si la réaction historique de Poincaré à l'argument de Zermelo semble peu assurée, au moins du point de vue systématique sa position reste soutenable. Car la forme conditionnelle de P1a interprété comme

P1a': ' Si dans une définition un quantificateur universel porte sur une totalité qui enveloppe le défini, mais qui existe indépendamment de ce défini, cette définition n'est pas circulaire.'

renvoie à la question de la vérité de l'antécédant, c'est-à-dire à la manière dont l'univers considéré est donné. Et c'est cette version pragmatiste de la question qui permet d'établir une nuance entre les deux exemples étudiés ci-dessus: d'une part, l'univers est un sous-ensemble de l'ensemble des parties des nombres rationnels complexes, d'autre part un sous-ensemble de l'ensemble des parties d'un ensemble (en principe) quelconque. Pour un pragmatiste cette différence doit être de taille, bien que pour la percevoir il faille dépasser le cadre textuel du 'finitisme' de Poincaré qui, tout en soutenant le caractère constructif des nombres entiers, conteste leur clôture . Or, tandis que, selon Borel, la transition des nombres rationnels aux réels exige - si on renonce à solliciter l'intuition géométrique - "que l'on admette la légitimité d'une infinité dénombrable de choix successifs et arbitraires...[qu'] on ne peut évidemment pas effectuer tous, mais [pour laquelle] on peut du moins indiquer une marche telle que, cette marche étant fixée, on soit assuré que l'un quelconque des choix sera effectué au bout d'un temps fini" [20], une telle construction sécuentielle est impossible dans le cas général de la transition d'un ensemble à l'ensemble de ses parties . Si l'on fait abstraction de la circonstance qu'une conception 'close' des nombres naturels semble inévitable, ces deux exemples reflètent à l'égard de leur 'vérification' les deux tendances opposées du pragmatisme constructif et du cantorisme: en effet, seul le premier exemple permet une instance de vérification qui, selon Poincaré, décide sur le 'sens' d'une définition . Car la structure de cet exemple fait qu'il participe, certes, "de l'infini, mais non parce qu'une des vérifications possibles en participe elle-même, mais parce que les vérifications possibles sont en nombre infini" [21]. En d'autres termes, ces présuppositions méthodologiques donnent la liberté de suspecter un cercle là où on traîte d'un ensemble en général, sans pour autant mettre l'Analyse entière en cause. Dans ce sens l'argument de Zermelo n'est pas impératif.

Une remarque semblable s'impose à l'égard d'une analyse du reste très claire que donne Fraenkel en 1927 de la discussion entre Poincaré et Zermelo exposée ci-dessus. [22] Il y prend position pour Zermelo; bien plus, il renforce son argument; car la modification P1a de Poincaré ne lui semble pas seulement légitimer des procédés jusqu'ici jugés non-prédicatifs par Poincaré lui-même, mais conduire à l'exclusion de l'élément non-prédicatif dans les antinomies comme celle de Burali-Forti. Pour le voir,

20 Borel 1908b, p. 16.
21 Poincaré 1912, p. 85.
22 Cf. Fraenkel 1927, pp. 26-34.

il suffit d'assimiler la formulation standard de cette antinomie à P1a de la manière suivante:

> "Considérons d'abord l'ensemble de tous les nombres ordinaux (ordonnés d'après leur grandeur) comme un ensemble ordonné O et démontrons seulement ensuite que son type d'ordre est un nombre ordinal (c.-à-d. un type d'un ensemble bien ordonné) qui devrait donc lui-même appartenir à l'ensemble O comme élément." 23

On aurait par conséquent, et l'antinomie, et la prédicativité.

Cette argumentation de Fraenkel a sûrement contribué à faire négliger désormais P1a. Et pourtant, le pragmatiste ne la suivra guère puisqu'il ne disposera pas d'un procédé pour la construction de la totalité de la classe ordonné des nombres ordinaux.

L'analyse de Fraenkel est néanmoins précieuse, car elle délimite les positions ontologiques conciliables avec P1a : si un finitisme strict semble trop restreint pour être maintenu (l'univers deviendrait alors trop petit, des différences importantes disparaîtraient dans l'uniformité du complément), la position cantorienne d'autre part réintroduirait le cercle et serait trop large. En d'autres mots, si la prédicativité selon P1a dépend du mode dont l'univers est donné, elle restreint en contrepartie le choix philosophique de son interprétation.

23 Fraenkel 1927, p. 30.

III. Le problème de la prédicativité consiste à éviter un cercle vicieux en ajustant l'application des quantificateurs au mode d'existence de leur domaine. Ainsi toutes les variantes du premier concept de Poincaré ont en commun qu'elles interdisent la quantification dans un domaine dont les éléments ne peuvent pas être antérieurement indiqués dans leur totalité.

A partir de 1908 surgit parallèlement à cette analyse une autre idée qui conduira en 1909 à une 'nouvelle' définition' (Poincaré, il est vrai, ne la désigne pas comme telle): maintenant il appelle

P2: une classification prédicative, si elle n'est pas bouleversée par l'introduction de nouveaux éléments[24].

Tandis que P1 mène à l'idée qu'une définition prédicative oblige à limiter la quantification non-restreinte à des ensembles qui sont à notre disposition au sens pragmatique (on est conduit à limiter les domaines infinis), P2 indique des conditions restrictives pour la quantification sans qu'il intervienne une restriction explicite du domaine: pour qu'une classification soit prédicative selon P2, il suffit que la quantification portant sur un domaine indéfini[25] dont dépend le définiendum, ne change pas la classification déjà déterminée de ses éléments. Si on prend l'antinomie de Russell comme exemple, l'introduction de E comme valeur du quantificateur universel oblige à changer la classification existante, car celle-ci devient contradictoire.

Reste le problème de l'équivalence extensive entre P1 et P2. Vont-elles exclure les mêmes définitions? Les différents exemples que j'ai examinés ne sont guère de nature à dissiper toute obscurité dans l'

24 Cf. Poincaré 1909c, p. 122.

25 Un domaine est appelé 'indéfini', si on peut lui ajouter un élément non-exprimable par les moyens de définitions préalablement fixés.

application des règles de prédicativité. Ceci d'autant plus que la portée réelle de P1a' dépend -comme nous l'avons vu - du concept sous-jacent de constructivité.

Au lieu de poursuivre la discussion sur la constructivité <u>ab ovo</u>, nous présupposons pour la fin la totalité actuelle et prédicative des nombres naturels: c'est la condition nécessaire d'un développement des mathématiques dépassant l'arithmétique élémentaire. Cette décision mettra quelque lumière sur la relation entre P1 et P2.

Si on présuppose donc un langage du 2ᵉ ordre permettant des quantifications sur des ensembles de nombres naturels, l'exigence de P1a, qu'une définition prédicative ne doit utiliser que des quantificateurs portant sur des ensembles déjà à notre disposition, conduit - comme l'a démontré Feferman[26] - à une théorie exclusive des types, et l'idée intuitive de P2: que les définitions doivent être invariantes par rapport à un élargissement du domaine de leurs quantificateurs du 2ᵉ ordre, nous mène à une théorie cumulative des types. On montre ensuite que, dans les deux cas, les ensembles prédicativement définissables sont les mêmes: cet univers se compose exactement de la totalité des ensembles hyperarithmétiques qui sont une extension des ensembles appartenant à la hiérarchie arithmétique de la classe des prédicats différenciée selon la complexité de leur non-décidabilité et qui se trouvent d'autre part au bas de l'échelle de la hiérarchie analytique qu'on obtient, si on passe du 1ᵉʳ au 2ᵉ ordre.

Ainsi, par l'équivalence en question, se confirme au niveau des systèmes formels l'idée intuitive de Poincaré. Par contre, si l'univers hyperarithmétique est vraiment une description adéquate de l'idée de prédicativité, est une autre question dont le traitement demanderait une autre conférence d'un caractère plus technique.

---

26 Cf. <u>Feferman 1964</u>.

## Bibliographie


**Borel**, Emile

1908a Les paradoxes de la théorie des ensembles. Ann. scientifiques de l'ENS 44 (3e série 25), pp. 443-448.

1908b Sur les principes de la théorie des ensembles. Atti int. dei Matematici, Roma, vol II, pp. 15-17.

**Feferman**, Solomon

1964 Systems of Predicative Analysis. The Journal of Symbolic Logic 29, pp. 1-30.

**Fraenkel**, Adolf Abraham

1927 Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, Leipzig/Berlin.

**Heyting**, Arend

1934 Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie, Berlin.

**Poincaré**, Jules Henri

1906 Les mathématiques et la logique. Rev. méta. et mor. 14, pp. 294-317.

1909a Réflexions sur les deux notes précédentes. Acta mathematica 32, pp. 195-200; cité d'après la réimpression dans Poincaré, Oeuvres, t. XI, pp. 114-119.

1909b La logique de l'infini. Rev. méta. et mor. 17, pp. 461-482; cité d'après la réimpression dans Poincaré, Dernières pensées, Paris 1963, pp. 7-31.

1909c Über transfinite Zahlen. Dans H. Poincaré, Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik, Leipzig/Berlin 1910, 5. Vortrag, pp. 43-48; cité d'après la réimpression dans Poincaré, Oeuvres, t. XI, pp. 120-124.

1912 La logique de l'infini. Scientia 12, pp. 1-11; cité d'après la réimpression dans Poincaré, Dernières pensées, Paris 1963, pp. 84-96.

**Russell**, Bertrand Arthur William

1906a On some Difficulties on the Theory of Transfinite Numbers and Order Types. Proc. of the London Math. Soc., 2nd ser., 4 (1907) (issued 1906), pp. 29-53.

1906b Les paradoxes de la logique. Rev. méta. et mor. 14, pp. 627-650.

**Zermelo**, Ernst Frierich Ferdinand

1908 Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. Mathematische Annalen 65, pp. 107-128.

1909 Sur les ensembles finis et le principe de l'induction. Acta mathematica 32, pp. 185-193.