R. Peiffer Reuter

La limitation de l'illimité et la finitude de l'infini

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1987, fascicule 14
« La limitation de l'illimité et la finitude de l'infini », , p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1987___14_A1_0>

LA LIMITATION DE L'ILLIMITE ET LA FINITUDE DE L'INFINI

Rêverie sur les paysages de l'analyse classique et non-standard

Ceci n'est pas une théorie mathématique ou méta-mathématique, mais la description d'une image. Une de ces images dont " on ne se débarrasse pas ", dont on n'a aucun intérêt à se débarrasser- tant qu'elle n'usurpe pas la place d'un raisonnement ou qu'elle entrave le libre développement de la pensée.

Le paysage à évoquer, celui de l'analyse non standard, n'est pas une terre inexplorée à l'écart des grands parcours mathématiques. On y retrouve les traces des précurseurs et créateurs du calcul différentiel, de Kepler et Fermat à Leibniz et Newton et leurs successeurs. Traces d'une démarche un peu hésitante, qui parfois s'empêtre dans le foisonnement des infinitésimaux, pour se réfugier ensuite dans les terrains désherbés à l'ombre de la "Limite" où va s'aménager le soubassement de l'analyse classique d'aujourd'hui. Ce changement de point de vue est très perceptible chez Leibniz.
C'est au 19è siècle, à l'époque du grand nettoyage, que fut instauré le règne exclusif de la limite et des techniques ε, δ. On n'avait plus besoin d'infinitésimaux. Si leurs fantômes continuaient à nous regarder par les lacunes de $\mathbb{Q}$, leurs pendants infiniment grands à se profiler à l'horizon, ils étaient bannis de la mathématique officielle. C'est un fait curieux qui n'a pas son pareil dans l'histoire des mathématiques, que le refus radical de ces objets avec lesquels on avait calculé depuis des siècles et qu'on continuait à utiliser " en cachette".

Leur retour spectaculaire au 20è siècle serait-il un retour en arrière, vers les images puériles des débuts? Il n'en est rien; une approche nouvelle a su conférer à ses objets mal famés d'existence douteuse une solide réalité mathématique. Le procédé de la " loupe"nous fait voir le minuscule côté du polygone qu' est une courbe dérivable: l'image naïve est devenue l'essence même de la dérivabilité.

En dépit de cette réhabilitation de l'infinitésimal, on peut se demander si cette nouvelle analyse n'est pas superflue, si elle ne vient pas trop tard, puisqu'on dispose d'une méthode qui fonctionne bien, qui a fait ses preuves. Puisque ses créateurs, Nelson aussi bien que Robinson, affirment eux-mêmes qu'un discours sur les infinitésimaux est toujours traduisible en un discours classique équivalent au moyen des ultraproduits. Mais les infinitésimaux, s'ils osent dire leur nom, sont souvent plus efficaces que sous la forme voilée de la limite. Ils abordent plus directement des questions qui, sans eux, ne seraient même pas posées, resteraient escamotées par une perspective défavorable. Tels les problèmes concernant des effets macroscopiques liés à des causes microscopiques. Considérée sous cet angle, la nouvelle théorie n'est pas un luxe " rétro" ou une extravagance de logiciens, mais une acquisition utile.

L'image classique, le domaine désherbé et élagué par le sacrifice de l'infiniment petit et de l'infiniment grand, est une forme simplifiée, grosso modo une structure-quotient de l'image beaucoup plus riche qui est la base du non-standard. La simplicité, selon Bachelard, n'a pas de racine dans le réel- représenté ici par la structure intuitive d'une extrême complexité située à l'origine de la mathématique. La simplicité, c'est la facilité d'un langage bien réglé - le langage formalisable qui confère à l'objet classique sa rigueur et son soubassement solide.

C'est de là, de la plateforme bourbachique, qu'il faudra partir pour introduire et légitimer la théorie nouvelle.

Il s'agit donc d'un trajet à contre-sens, de la structure réduite vers la structure plus riche, qui donne à celle-ci une allure de rallonge artificielle, de hasardeuse construction en encorbellement appuyée sur les piliers de fortune fournis par quelques axiomes sur-ajoutés. Ce n'est pas la nature de l'objet, mais la position du point de départ situé dans la mathématique ensembliste d'aujourd'hui, qui fait prendre pour adjonction d'éléments fantômes ce qui n'est que mise en lumière d'objets secrètement présents au sein de la structure classique, cachés à l'intérieur des classes d'équivalence où on ne pénètre pas.

Il n'y a pas d'opposition ou d'incompatibilité entre les deux images. Il n'y a pas deux mathématiques. Il y a des différences de perspective, d'éclairage, d'approche.

1° L'AUTRE APPROCHE DU NOMBRE

Au commencement il y a le nombre, ou plus précisément l'image archétypale d'où il dérive: la séquence, la marche interminable dans le temps et dans l'espace, schématisée par le diagramme

.......||||||||||||........

toujours inachevé et prolongeable. Cette figure qui représente l'ordre le plus simple, le rythme le plus primitif, la décoration la plus banale, recèle la notion du nombre dans la succession de ses éléments, l'algèbre des anneaux et la géométrie affine de la droite dans le jeu de ses endomorphismes.

Il y a pour chaque élément x un $\bar{x}$ qui le suit et un $\underline{x}$ qui le précède immédiatement. Si la séquence est sans rupture-comme on l'imagine spontanément- si tout x peut être atteint à partir d'un x' quelconque en parcourant tous les éléments intermédiaires, on peut l'appeler "archimédienne".
Car une lignée bilatère de ce genre balise la droite entière, selon l'axiome d'Archimède. Je note $\hat{L}$ ce genre de séquence, $\overset{\leftarrow}{L}$ et $\vec{L}$ ses "moitiés" ascendante et descendante. Ce ne sont pas là des objets " standard" de la mathématique ensembliste, mais plutôt des schémas d'ensembles: leurs intervalles limités $[x, y]$ sont des ensembles finis ordonnés.

$\hat{L}$ possède un système très riche d'isomorphismes dans lui-même. Les plus importants sont:
Les symétries: $\hat{L}$ est symétrique par rapport à chacun de ses éléments;
les translations caractérisées par l'intervalle $[x, \tau(x)]$ de déplacement, égal pour tous les x. A côté de ces automorphismes, il y a des isomorphismes non surjectifs qui appliquent $\hat{L}$ sur une partie raréfiée. Les plus intéressants sont:
les similitudes $x \rightarrow \mu(x)$, où les $\mu(x)$ sont les extrémités d'une séquence d'intervalles égaux, de sorte que $\mu(\hat{L})$ se définit par une nouvelle loi de succession, d'où il résulte une compatibilité avec les translations.

Les deux visages du nombre ne se décrivent qu'imparfaitement au moyen des dualités usuelles: cardinal-ordinal, objet-relation, statique-dynamique..... Il vaut mieux dire: le nombre qui colle à l'archétype et celui qui s'en détache, c'est-à-dire le nombre ensembliste.

Un nombre se représente le plus naturellement par un élément a de $\hat{L}$, individualisé au moyen du choix d'une origine notée 0. A un nombre ainsi défini est associé d'emblée un nombre opposé $-a$, le symétrique par rapport à l'origine, et un intervalle donné par le parcours dénombrant de 0 à a. Cet intervalle détermine une translation τ_a et une similitude μ_a, les fonctions additive et multiplicative de a. Les opérations arithmétiques sont envisagées dans ce contexte non pas comme des modes de combiner des nombres individuels, mais comme des endomorphismes du système entier $\hat{L}$.

τ_a est donné par $\tau_a(0) = a$ et μ_a par $\mu_a(1) = a$;
La somme et le produit en posant

$$x + a = \tau_a(x) \quad ; \qquad x \cdot a = \mu_a(x).$$

Il existe une correspondance parfaite entre cette définition par les endomorphismes, les opérations traditionnelles de l'arithmétique, ainsi que la structure formelle $\mathbb{Z}$.
Les τ forment un groupe commutatif engendré par τ_1, qui reproduit le groupe additif de $\mathbb{Z}$: $\tau_b \tau_a = \tau_{a+b}$.
Les similitudes (avec la symétrie $\mu_{-a}(x) = \mu_a(-x)$) reproduisent le semi-groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}^*$:

$$\mu_b \mu_a = \mu_{ab}.$$

Il y a entre les translations et les similitudes une relation intuitivement évidente: $\boxed{\mu_b \tau_a = \tau_{a.b} \mu_b}$
qui d'abord exprime la loi de distributivité, puisque

$$\mu_b \tau_a(x) = (x+a).b \quad ; \quad \tau_{ab} \mu_b(x) = x.b + ab.$$

Ensuite, la possibilité de ramener la multiplication à des additions successives, doù découle la commutativité; en effet on a pour a=1: $\mu_b(\bar{x}) = \mu_b(x) + b$.
La permutabilité exprimée par cette formule permet d'écrire tout produit de translations et similitudes sous la forme

$$\xi = \tau \mu.$$

Par suite du caratère archimédien de $\hat{\mathbb{Z}}$ il existe pour tout couple d'éléments x et $y \leq x$ un élément g et un $r < y$ tels que

$$x = \tau_r \mu_y(g) = g \cdot y + r.$$

On voit que l'archétype $\hat{\mathbb{Z}}$ muni de ses endomorphismes contient implicitement la structure d'anneau euclidien.
De sorte qu'on peut dire que c'est là la plus naturelle des structures algébriques.

Les τ et les μ peuvent être interprétés géométriquement comme des transformations globales de la droite; les produits $\xi = \tau\mu$ sont alors des transformations affines.
La droite est la seule figure géométrique invariante pour les translations et les similitudes; le cercle peut glisser sur lui- même , mais il n'est pas pareil à son image agrandie.
La géométrisation du nombre entier n'est pas une simple implantation de repères sur la droite, mais aussi l'induction d'un rythme dans le jeu des automorphismes par la combinatoire du sous-système discret engendré par τ_1 et les μ_{p_i} (qui correspondent aux nombres premiers).

Reste à faire une remarque importante au sujet des similitudes. Celles-ci montrent clairement que n'importe quel nombre peut jouer le rôle de <u>l'unité</u>, c'est-à-dire du <u>successeur de 0</u>. Un tel changement de la loi de succession ne modifie pas le système: les μ_a sont des isomorphismes.
Cette particularité -qui existe aussi dans $\check{L}$ - n'a pas échappé au perspicace Russel et lui a fait refuser la définition des nombres entiers par les axiomes de Peano. Il leur substitue le système ensembliste, où l'unité est l'immuable singleton, et non un repère flottant dans $\hat{L}$. C'est pourtant cette <u>mobilité de l'unité</u> qui fait de l'autre conception un meilleur départ vers les méthodes non standard.

Les nombres a donnés comme éléments de $\hat{L}$ peuvent aussi être caractérisés par les <u>relations de</u> position des couples $(0,a)$ ou par les classes <u>d'intervalles</u> représentés par les $]0,a]$ qui forment la base de l'opération de <u>dénombrement</u>.
Toutes ces interprétations relient solidement le nombre à l'archétype. Il s'en détache au moment où on substitue à l'-intervalle <u>l'ensemble de</u> ses éléments
On en casse le fil ténu de l'ordre total qui est l'âme de la séquence pour présenter en vrac- dans une boîte- les perles du collier déchiré.
On a alors le nombre ensembliste, le <u>cardinal</u> qui représente une collection d'objets dépersonalisés. L'addition, la multiplication se ramènent à des manipulations sur ces objets.
Pourtant l'ordre renaît dans l'entassement des unités: l'adjonction d'une unité définit une loi de succession. La géométrisation fait reparaître le jeu des endomorphismes dans les transformations de la droite. Le nombre ne peut renier son hérédité.
Chaque élément X de la moitié descendante $\check{L}$ de l'archétype détermine un cardinal fini et cette correspondance est injective. C'est là le principe même du <u>dénombrement des objets concrets</u>.
Il y a aussi une correspondance parfaite entre les τ et les μ et les opérations classiques de l'arithmétique. De sorte que les nombres déduits de $\check{L}$ sont des membres à part entière de la communauté notée $\mathbb{N}$.

2° REGARDS SUR LA SUITE DES ENTIERS

Il y a deux manières d'envisager la suite sans fin des nombres entiers. Elle est comparable à une interminable colonnade- l'image est de G. Veronese - longée par un personnage nommé Tizio qui va d'une colonne à la suivante sans espoir d'arriver au bout. Alors qu'un observateur extérieur qui regarde de loin la file des colonnes la voit converger en un point de fuite à l'horizon. Au voisinage de ce point, tout se brouille : les colonnes se confondent, l'image de Tizio s'amenuise et disparaît.
C'est là la perspective classique et cantorienne. La suite supposée <u>achevée, fermée</u> par un élément <u>limite,</u> devient un <u>ensemble infini.</u> Le tonneau des Danaïdes est rempli.
Devant la limite, l'ordre s'effondre et le mécanisme producteur se bloque. Il n'y a pas d'avant-dernier élément, mais un ordre dense et on arrive à l'endroit où $x+1 = x$.

Quant au parcours de Tizio, c'est-à-dire la lignée $\grave{L}(0)$:
o, 1, 2 .... n, n+1............. il ne peut être intégré dans le contexte ensembliste qu'à l'aide d'un prédicat non collectivisant, car cet objet n'est pas un ensemble et n'arrivera jamais à remplir le tonneau des Danaïdes.
Il y a des colonnes que Tizio n'atteindra pas, quelle que soit sa persévérance. Elles représentent des nombres plus grands que <u>tous les</u> éléments de $\grave{L}(0)$, inaccessibles au calculateur standard confiné dans la lignée.
L'existence d'un tel nombre α , dit <u>infiniment grand</u> parce qu'inaccessible à partir des nombres standard, est une hypothèse lourde de conséquences.

1) On est en présence d'un infini <u>relatif:</u>
   α en tant qu'élément de $\mathbb{N}$ est un nombre fini. Le rôle de l'infini est donc joué, dans cette optique, par le fini <u>très grand,</u> hors d'atteinte. En un certain sens, Dieu n'est pas plus loin que Sirius.....
2) Il existe des intervalles finis , tel $[0,\alpha]$ qui contiennent une lignée entière. On peut enfermer un esprit dans une bouteille- et même une population extrêmement dense d'esprits comme on verra plus loin.

3° LE MONDE NON ARCHIMEDIEN DES NOMBRES ENTIERS

L'hologramme chatoyant des lignées n'est visible ni pour Tizio confiné dans son parcours de type $\check{L}$, ni pour l'observateur cantorien qui ne discerne plus ces objets trop éloignés, résorbés par la limite. Il est visible en survol, grâce à la vue globale que nous donne l'autre approche du nombre, par $\hat{L}$ et ses endomorphismes.

Dans cette optique, l'hypothèse de la colonne inaccessible signifie qu'il existe au-delà de la lignée de départ $\check{L}_1(o)$ formée par les nombres naturels o, 1 2 ..... n, n+1 ... un élément α qui est un nombre à part entière, c'est-à-dire qu'il est muni de la fonction additive τ_α et de la fonction multiplicative μ_α ; et qu'il possède une image par toutes les translations et similitudes du système.

Les translations "naturelles" $\tau_n^{\pm 1}$ qui correspondent aux éléments de $\check{L}_1$ (o) appliquent α sur les $\alpha \pm n$ qui forment une lignée $\hat{L}_1(\alpha)$ d'origine α. C'est l'image par τ_α de la lignée de base.

Entre $\hat{L}_1(0)$ et $\hat{L}_1(\alpha)$ il existe une foule de lignées intermédiaires, telle $\hat{L}_1(\alpha')$, α' étant le nombre entier $\frac{\alpha}{2}$ ou $\frac{\alpha+1}{2}$ qui n'appartient ni à $\hat{L}_1(o)$ ni à $\hat{L}_1(\alpha)$ puisque $\alpha-\alpha'$ n'est pas un nombre naturel.

Les images de α par les $\mu_n^{\pm 1}$, n étant un nombre naturel, forment une lignée $\hat{L}_\alpha(0)$ d'unité α qui est l'image par μ_α de la lignée emboîtée $\hat{L}_1(0)$.

On se trouve donc par le jeu des τ et des μ dans un système formé par une pluralité très riche de lignées $\hat{L}u$ (a) caractérisées par leur origine a et leur unité u.

Le thème $\hat{L}$ y est présent en tous les endroits et à toutes les échelles ; toute translation ou similitude est un isomorphisme.

Les $\tau_{nu}^{\pm 1}$ et les μ_{nu}, n étant un nombre naturel, sont les endomorphismes des lignées d'unité u. Il n'est donc pas possible de sortir d'une telle lignée par les additions et multiplications usuelles (effectuées avec u pour unité).

Les lignées " atomiques" $\hat{L}_1(a)$ d'unité 1 sont ou disjointes ou identiques et définissent donc des classes d'équivalence. La structure-quotient, qui est dense, est très différente de l'ordre de succession qui règne au sein des lignées.

Cette totalité. si simple par son thème $\hat{L}$ et ses variations-déplacements et agrandissements- fournit une panoplie de nombres incomparablement plus riche que le système classique qui reste fixé sur une lignée unique et rejette hors du champ visuel les lignées de l'au-delà et les lignées emboîtantes.

4° A LA RECHERCHE DES NOMBRES REELS

La conception du nombre entier comme élément de $\hat{\mathcal{L}}$ permet un accès direct aux autres sortes de nombres.
$\hat{\mathcal{L}}(0)$ donne d'emblée la partie négative standard de $\mathbb{Z}$, dont l'extension se fait par la symétrie relative à 0.
Les fractions peuvent être définies au moyen de similitudes.
Entre deux éléments de la lignée raréfiée qui est l'image de $\hat{\mathcal{L}}$ par μ_n il reste n-1 éléements non numérotés qui donneront les fractions de dénominateur n:
soit $\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \ldots\ldots \frac{n-1}{n}$ dans l'intervalle $[0,1]$. La règle de simplification $\frac{ka}{km} = \frac{a}{m}$ y ajoute les fractions $\frac{a}{m}$ pour tout m tel que km = n et y incorpore aussi les entiers, puisque $\frac{na}{n.1} = 1$.
Tout système fini de nombres rationnels-c'est-à-dire les objet de n'importe quel calcul effectif-peut être engendré de cette façon en prenant pour unité nouvelle un multiple commun des dénominateurs.
Mais il n'est pas possible d'obtenir de cette façon la totalité des quotients des nombres standard, car un multiple commun de tous les éléments de $\hat{\mathcal{L}}(0)$ doit dépasser chacun d'entre eux.
Il faut donc sortir de cette lignée et choisir comme nouvelle unité un nombre α infiniment grand.
Les éléments de l'intervalle $[0,\alpha]$ sont répartis sur des lignées bilatères disjointes qui forment un système dense.
En effet, on peut définir une injection des nombres rationnels $\frac{p}{q} < 1$ dans le système des $\hat{\mathcal{L}}$ en leur associant la lignée qui contient le quotient euclidien de $p\alpha$ par q. On reproduit ainsi le corps des quotients de l'anneau $\hat{\mathcal{L}}_1(0)$ en rendant négligeables les restes de la division euclidienne.

Cette application $\frac{p}{q} \to \widetilde{\frac{p}{q}}$ des fractions dans le système des $\hat{\mathcal{L}}$ est loin d'être surjective. Il existe en effet dans $[0,\alpha]$ une foule de nombres non standard qui sont infiniment petits par rapport à α : p.ex. la partie entière de $\sqrt{\alpha}$ (ou de $\sqrt[n]{\alpha}$)
Un tel nombre β appartient à une lignée située entre $\hat{\mathcal{L}}_1(0)$ et les $\widetilde{\frac{p}{q}}$. On peut répéter le raisonnement au sujet de l'intervalle $[0,\beta]$ et ainsi de suite indéfiniment.
L'existence du nombre β tel que $\beta^n \leq \alpha < (\beta+1)^n$ entraîne qu'on dispose, à l'intérieur de $[0,\alpha]$ d'un jeu "d'ordres de grandeur" $\beta, \beta^2, \cdots \beta^{n-1}, \beta^n$.
Il n'est donc pas besoin d'agrandir l'intervalle à cet effet, comme le fait Veronese, en passant à $\alpha^2, \alpha^3 \ldots\ldots \alpha^n$.

Au niveau des lignées atomiques, on a une structure dense d'une extrême richesse comprenant, outre les éléments rationnels, d'autres éléments qui s'infiltrent entre eux et entourent le zéro d'une auréole d'infinitésimaux.

Ces <u>infinitésimaux</u> définissent une relation d'équivalence qui donne un sens précis à l'adégalité de Fermat et autres égalités du même genre, dites approchées. Cette classification des nouveaux nombres entoure chaque rationnel d'un halo de nombres infiniment proches.

Le passage à la structure-quotient, c'est-à-dire classique, par élimination " honnête" de tous les infinitésimaux ne peut donner autre chose que $\mathbb{Q}$.

Le procédé de génération par déplacement de l'unité au-delà de la lignée standard produit donc, en dehors des nombres rationnels, des irrationnels plus nombreux que ceux du système classique ainsi que des infinitésimaux. Cette méthode, si elle entasse dans l'intervalle $[0, 1]$ tout ce qui se rencontre au cours d'un périple de dimension cosmique, ne fait pas sortir du domaine des entiers finis: on peut dire que <u>tout est dans $\mathbb{N}$.</u>

L'apparition automatique de l'infinitésimal avec les nombres rationnels et réels fait penser à une remarque de Kurt Gödel- rapportée par Robinson dans la préface de son célèbre ouvrage- qui s'étonne de ce que " le prochain pas en avant, après les réels, à savoir l'introduction des infinitésimaux, a été tout simplement omis".

Il reste à souligner le caractère arbitraire du nombre infiniment grand choisi comme unité nouvelle. Tous les intervalles non archimédiens $[\mathfrak{0}, \mathfrak{1}]$ ont une structure analogue, ce qui leur confère le caractère scalant indispensable à la réservibilité des similitudes et, par conséquent, à l'existence du groupe multiplicatif et de la structure de <u>corps</u>.

Le système classique, qui ne dispose pas des possibilités qu'offre le libre choix de l'unité, doit introduire des éléments nouveaux pour construire Q . Le caractère scalant de structure de corps s'obtient-intuitivement parlant- par intercalations successives.
Les séquences illimitées du type $\grave{L}$ ou $\acute{E}$ qui résultent de l'enchevêtrement des graduations sont converties en ensembles infinis par la même méthode que la suite des entiers: l'adjonction d'un élément-limite. On retrouve dans ces restes de halos que sont les irrationnels une évocation de l'énorme richesse du système non réduit, et peut-être aussi d'une certaine indétermination qui plane sur la résorption par les limites irrationnelles; leur nombre est supérieur à celui des rationnels, mais n'a pas de place fixée dans la suite des cardinaux infinis. Ce qui tend à faire croire qu'il y a plusieurs continus.
Ainsi on a d'un côté le système classique basé sur la lignée unique étirée jusqu'aux portes de l'infini et l'unité stable inlassablement répétée et morcelée.
L'infiniment petit n'est cerné qu'indirectement, par le biais de la limite qui devient la notion-clé de l'analyse.

De l'autre côté, le système non standard avec son jeu mouvant d'unités, où la pluralisation de l'archétype $\hat{L}$ ouvre une voie d'accès toute naturelle vers l'infinitésimal.

Ainsi l'infinitésimal reste intimement lié à l'archétype, objet non formalisable puisqu'il contient implicitement l'arithmétique dans les symétries et les similitudes de sa configuration.

5° L'IMAGE DIURNE ET L'IMAGE NOCTURNE

A voir le style si différent des deux images du nombre on ne peut résister à la tentation de les rattacher au régime diurne et au régime nocturne de l'imaginaire. Gilbert Durand, dans " Les structures anthropologiques de l'imaginaire " montre, à l'aide d'un exemple emprunté au philosophe de la biologie Georges Canguilhem, qu'une querelle scientifique peut être le résultat de différences des régimes de l'image.
Il s'agit ici de deux conceptions antagonistes de la cellule, soit comme constituant atomique essentiel du vivant, soit comme une formation secondaire issue de l'organisation intérieure d'un fluide initial. L'une relève de la "rêverie du cloisonné," l'autre d'une rêverie de l'intimité."
Il est impossible de ne pas remarquer l'analogie avec les deux formes rivales de l'analyse et les images du nombre qui les dominent. La mathématique ensembliste est le domaine du <u>cloisonné</u>, des frontières nettes sur lesquelles se rétractent les terrains vagues autour des collections floues, de la <u>séparation</u> entre la partie et son complément.

Quant à l'arithmétique non standard, elle se développe à partir des symétries intérieures de la structure archétypale et retrouve son thème <u>miniaturisé</u> dans <u>l'intimité</u> des lignées atomiques.
A l'origine, par l'archétype dont il dérive, le nombre est nocturne. C'est une structure répétitive et progressive qui refuse toute limitation. Il devient diurne par son application aux objets réels, d'abord par le <u>dénombrement</u>. La comptine cueillie sur l'archétype finit par s'identifier avec les collections dénombrées, par devenir <u>ensemble d'</u>objets anonymes. Ce qui donne la forme la plus familière du nombre, le cardinal.
La mesure, c'est à l'origine un dénombrement précédé d'un découpage en morceaux équivalents. Cette pratique mène vers l'image de la <u>règle graduée,</u> doublement diurne par la rectitude du support et son morcellement diaïrétique.
Le nombre, confusément senti dans le rythme répétitif de l'archétype se clarifie au contact du monde concret en des images de caractère diurne. L'arithmétique traditionnelle, c'est déjà une <u>mathématique appliquée.</u>

Il y a eu dans l'histoire des mathématiques un moment où la bifurcation diurne-nocturne se dessinait avec une netteté particulière. C'était à la fin du XIXè siècle, à propos du dépassement de la lignée des nombres naturels.

D'un côté il y a l'échelle de Jacob que Cantor lance vers le ciel du transfini, de l'autre côté, les nombres infiniment grands que Veronese plante sur la terre d'une droite non archimédienne.
C'est un magnifique exemple de démarche diurne que celle de Cantor: la fermeture par la limite qui bloque la génération sans fin des entiers naturels et la transcendance par le gigantisme des cardinaux nouveaux.
Par contre, dans le système de Veronese s'esquissent déjà les gestes de la répétition inlassable de $\widehat{L}$ par redoublement et emboîtement qui caractérise le cortège non standard des nombres, image nocturne s'il en est.
On y trouve la pluralité dans l'avalanche des lignées, la gullivérisation du nombre rendu infinitésimal par changement d'unité, l'aspect synthétique du schème de l'avalage dans le passage aux classes d'équivalence, la double négation dans la notion même des lignées et leurs isomorphismes, où il n'y a pas d'élément sans successeur ou sans image. L'attachement à l'aspect concret se manifeste dans la finitude d'un "infini" terre à terre fait à la mesure des sciences empiriques . Et avant tout, il y a la viscosité, la persistance du thème $\widehat{L}$ qui revient en tous les endroits et à toutes les échelles.

Ainsi la dualité des aspects du nombre et de l'analyse nous fait descendre au plus profond de la genèse des images, là où se séparent le jour et la nuit. Cela explique peut-être, en cette époque où règnent les images diurnes, l'étrange aversion que rencontrent parfois les théories qui réintroduisent l'infinitésimal. Cette aversion se rationalise dans le refus de l'archétype $\widehat{L}$ qui miniaturise l'arithmétique, afin d'éviter l'inévitable confrontation avec l'impossibilité de la formaliser.
Pourtant, les théories non standard ne s'opposent pas à la mathématique classique. Elles ne mettent en question aucun résultat acquis, et tous les résultats nouveaux se traduisent en langage classique. Les deux faces de l'analyse ne s'affrontent pas en une antithèse stérile, mais de réunissent en tête de Janus, symbole de la profonde unité dans la dualité et de l'immensité du champ visuel de la mathématique.

Platon, le philosophe diurne, n'était pourtant pas sans apercevoir l'autre face des êtres mathématiques, lui qui, selon Andreas SPeiser a mieux connu leur signification que nous qui en savons bien plus long à leur sujet.
Son porte- parole Parménide-diurne s'il en est - l'exprime en disant:
« Il faut que se brise, à mon avis et que s'émiette n'importe quoi » si le Un n'est pas. Les grandeurs se relativisent.
" La singularité d'une masse est infinie pluralité" et le moindre morceau " apparait immense par rapport à l'émiettement issu de lui".
Les nombres n'ont avec les masses qu'un " fantôme d'égalité" et leur séquence s'étire à perte de vue dans les deux sens:
" avant le commencement, il apparaît un autre commencement après la fin encore un reste, une autre fin ... "
Unité et pluralité dépendent du point de vue : la " masse sans Unité" qu'on arrive à saisir par la pensée " de loin, pour une vue émoussée, aura nécessairement une unité apparente; mais de près, pour un petit esprit pénétrant, c'est pluralité illimitée qui apparaît dans l'unité singulière"
Tout cela arrive dans la mathématique non standard qui ne s'en plaint pas, et se porte bien dans son monde relativisé au milieu de ses microscopes et macroscopes.
Le Un qui est n'est pas non plus sans embûches. Il est profondément ensembliste, c'est le singleton $\{\emptyset\}$ comprenant l'objet sans parties $\emptyset$; le "Un"; l'Être, c'est la parenthèse $\{\ \}$ qui en fait l'ensemble engendrant la pluralité infinie des nombres naturels. Le "Un qui est " s'éparpille sur la multitude immense des singletons, où se profilent déjà des ensembles susceptibles de se contenir eux-mêmes.
L'ensemble, sous ses allures hypocrites d'objet bien délimité et presque concret, cache le même piège que l'arithmétique miniaturisée dans l'archétype nocturne $\hat{I}$. Le Crétois menteur ricane à l'arrière-plan.....
Il n'y a pas de voie royale dans le paysage mathématique, il n'y a que des sentiers escarpés. Mais cette absence de grandes routes plates et sans surprise est peut-être un de ses principaux attraits.