

# SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES

BERNARD DIU

## **L'entropie : aspects objectifs et aspects subjectifs**

*Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, 1987, fascicule 3  
« L'entropie : aspects objectifs et aspects subjectifs », , p. 1-18

[http://www.numdam.org/item?id=SPHM\\_1987\\_\\_3\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1987__3_A1_0)

© École normale supérieure – IREM Paris Nord – École centrale des arts et manufactures,  
1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Séminaire de philosophie et mathématiques » implique  
l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute  
utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.  
Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## **L'ENTROPIE : ASPECTS OBJECTIFS ET ASPECTS SUBJECTIFS**

**Bernard DIU**

Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies\* - Paris\*\*

*Conférence donnée le 16 mars 1987 dans le cadre du "Séminaire de Philosophie et Mathématiques" de l'Ecole Normale Supérieure.*

PAR LPTHE 88/05

FEVRIER 1988

---

\* **Laboratoire associé au CNRS UA 280.**

\*\* **Adresse :**  
**Université Paris VII**  
**Tour 24-14, 5ème étage**  
**2, place Jussieu**  
**75251 Paris Cedex 05 - France.**

Nous nous proposons de discuter ici quelques propriétés des systèmes thermodynamiques, c'est-à-dire des systèmes de taille macroscopique tels que, par exemple, un échantillon de quelques litres de gaz sous la pression atmosphérique et à la température ordinaire. Nous nous limiterons aux états d'équilibre macroscopique de ces systèmes. Leur entropie, découverte par les thermodynamiciens (Clausius) vers 1850, est restée assez longtemps une grandeur mystérieuse, dont la nature physique était mal comprise. L'avènement de la mécanique statistique, fondée sur les travaux de Boltzmann (1872), a permis de préciser ce qu'est en réalité l'entropie ; mais, curieusement, cette clarification a introduit un doute quant au caractère objectif de l'entropie.

Précisons qu'on qualifiera d'"objective" une grandeur ou propriété intrinsèque du système étudié, sur laquelle tous les observateurs s'accorderont nécessairement dès lors qu'ils auront convenu de sa définition. Elle sera au contraire "subjective" si elle fait intervenir l'observateur de façon non-triviale, c'est-à-dire si sa valeur peut varier irréductiblement d'un observateur à l'autre. Il va sans dire que les théories physiques introduisent préférentiellement, et si possible uniquement, des grandeurs ou propriétés objectives. Mais il peut se faire (nous le verrons sur l'exemple de l'entropie) qu'une grandeur soit définie de façon "opératoire" et qu'il soit difficile, voire impossible, de rendre cette définition parfaitement objective en éliminant totalement le rôle de l'observateur.

Cet exposé comprend trois parties principales : la première retrace rapidement le processus historique et logique qui a conduit à la définition statistique de l'entropie ; la deuxième partie pose le problème de l'objectivité dans la description statistique d'un système physique ; la troisième partie analyse un peu plus précisément ce problème dans le cas d'un système thermodynamique à l'équilibre et tente de dégager des

éléments de solution.

## **I - L'entropie.**

### 1) L'entropie en thermodynamique.

Le désir d'analyser la "puissance motrice du feu" pour réaliser des moteurs thermiques, c'est-à-dire des machines capables de fournir du travail mécanique à partir de chaleur, a donné naissance, dans la première moitié du XIXème siècle, à la thermodynamique. Cette discipline est devenue une théorie physique très élaborée, dans laquelle l'ensemble des phénomènes relatifs à la chaleur et à sa transformation en travail mécanique est ramené à un petit nombre de "principes", essentiellement deux.

Le "premier principe de la thermodynamique" affirme l'équivalence fondamentale de la chaleur et du travail. Lorsqu'un système tel qu'un échantillon de gaz est à l'équilibre macroscopique, il possède une énergie totale bien déterminée. Il existe essentiellement deux façons différentes de modifier cette énergie, c'est-à-dire de fournir (ou de retirer) de l'énergie au système. En premier lieu, on peut le faire en modifiant les "paramètres extérieurs" qui déterminent son état macroscopique (par exemple le volume pour un gaz) : les forces qui, de l'extérieur, maintiennent en place ces paramètres (pression extérieure pour un gaz) effectuent, au cours de telles modifications, un travail mécanique ; selon qu'il est moteur ou résistant, ce travail des forces extérieures augmente ou diminue l'énergie du système. Mais l'expérience montre qu'on peut également transférer de l'énergie au système sans changer les paramètres extérieurs, en le chauffant, c'est-à-dire en lui fournissant de la chaleur (on peut évidemment aussi lui en retirer). La chaleur est donc une forme d'énergie échangée comme le travail, mais différente de ce dernier ; si la nature physique du travail est

connue grâce à la mécanique, celle de la chaleur (définie comme l'énergie échangée qui n'est pas du travail) reste à ce stade mystérieuse. Le "premier principe" exprime donc la conservation de l'énergie, en reconnaissant qu'un apport de chaleur augmente l'énergie du système au même titre qu'un apport de travail : on écrit (algébriquement)

$$E_2 - E_1 = W + Q , \quad (1)$$

où  $W$  est le travail et  $Q$  la chaleur fournis au système,  $E_1$  et  $E_2$  étant les valeurs de son énergie dans l'état initial et dans l'état final de la transformation considérée.

Le "second principe de la thermodynamique" est beaucoup plus subtil. Il constate que la chaleur et le travail, bien qu'équivalents dans le bilan énergétique d'une transformation, se comportent de façon dissymétrique, de sorte que certains processus qui seraient permis du point de vue énergétique ne se produisent pas en réalité.

Cette constatation peut être exprimée et résumée sous forme d'énoncés qualitatifs du second principe. Ainsi l'"énoncé de Kelvin-Planck" affirme qu'"il est impossible de réaliser un processus dont le seul résultat serait de transformer intégralement en travail une quantité de chaleur fournie par une source de chaleur unique" (impossibilité d'un moteur thermique à cycle monotherme) ; l'"énoncé de Clausius" dit quant à lui qu'"il est impossible de réaliser un processus dont le seul résultat serait de transférer de la chaleur d'une source froide à une source chaude". On peut démontrer que ces deux énoncés sont logiquement équivalents l'un à l'autre.

Mais, en utilisant la notion de processus réversibles, Clausius introduisit une nouvelle fonction d'état (c'est-à-dire une grandeur prenant dans chaque état d'équilibre macroscopique du système une valeur déterminée, indépendante de la manière dont le système est parvenu dans

cet état), l'entropie. Le second principe s'exprime alors de façon analytique : l'accroissement (algébrique)  $S_2 - S_1$  de l'entropie du système dans une transformation réelle vérifie nécessairement

$$S_2 - S_1 \geq \frac{Q}{T_e}, \quad (2)$$

où  $Q$  est toujours la chaleur (algébrique) fournie au système par une source extérieure de température  $T_e$  (la formule se généralise aussitôt aux transformations où le système reçoit de la chaleur de plusieurs sources de températures différentes) ; dans cette condition (dite "inégalité de Clausius"), l'égalité correspond au cas limite idéal où la transformation étudiée est réversible.

On sait donc en thermodynamique définir et en principe calculer l'entropie  $S$  d'un système. La véritable nature physique de l'entropie reste, comme celle de la chaleur, mal comprise. Mais il est clair d'après sa définition que l'entropie thermodynamique est une grandeur objective.

## 2) L'entropie de Boltzmann.

Parallèlement au développement de la thermodynamique, le XIX<sup>ème</sup> siècle vit la réapparition et l'affirmation progressive de l'"hypothèse atomique", selon laquelle les corps macroscopiques ont en réalité une structure intime "granulaire" : les gaz, par exemple, sont constitués de molécules. Un conflit extrêmement violent opposa jusqu'au début du XX<sup>ème</sup> siècle les thermodynamiciens "orthodoxes" aux tenants de la théorie atomique.

Pourtant, dès 1872, Ludwig Boltzmann avait jeté les bases d'une théorie nouvelle, fondée sur l'hypothèse atomique et englobant la thermodynamique. Le lien entre les propriétés d'un système à l'échelle atomique, dite "microscopique", et ses propriétés thermodynamiques à

l'échelle macroscopique se manifeste dans la célèbre formule de Boltzmann

$$S = k \ln \Omega : \quad (3)$$

S est l'entropie du système lorsqu'il se trouve dans un état macroscopique déterminé et  $\Omega$  le nombre d'états microscopiques pouvant réaliser cet état macroscopique, c'est-à-dire compatibles avec lui ; la "constante de Boltzmann" k est universelle, et vaut

$$k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ joule par kelvin} . \quad (4)$$

Notons que  $\Omega$  est faramineusement grand : son logarithme est de l'ordre de  $10^{23}$ , c'est-à-dire du nombre d'Avogadro ! On peut le comprendre : un litre de gaz dans les conditions ordinaires comporte environ  $3 \times 10^{22}$  molécules ; le nombre de façons de répartir entre elles une énergie totale E donnée est effectivement gigantesque.

La géniale découverte de Boltzmann a donné naissance à la mécanique statistique. Elle permet déjà de se faire une idée plus précise de l'entropie : celle-ci mesure en quelque sorte l'"arbitraire" que laisse au niveau microscopique la préparation d'un système dans un état macroscopique déterminé.

On peut cependant se poser la question : comment est-il possible qu'interviennent ainsi tous les états microscopiques susceptibles a priori d'être réalisés lorsqu'on fixe l'état macroscopique ? On s'attendrait plutôt à ce que le système se trouve dans l'un de ces états microscopiques permis, sans qu'on sache lequel, alors que c'est leur nombre total qui apparaît dans la formule (3). La réponse à cette question fondamentale découle du fait que la description microscopique d'un système macroscopique est de nature probabiliste : chacun des états microscopiques compatibles avec l'état macroscopique du système considéré a une certaine probabilité d'être réalisé. Nous préciserons plus loin comment sont définies et déterminées

ces probabilités, mais dans leur intervention pointe déjà le bout de l'oreille de la "subjectivité".

### 3) L'entropie statistique.

De façon générale, lorsqu'on traite par la technique des probabilités les résultats possibles d'une expérience, c'est qu'on n'en connaît pas l'issue de façon certaine à l'avance : on ne possède pas toute l'information qui serait nécessaire pour prédire avec certitude le résultat de cette expérience. La "théorie de l'information", qui s'est développée au cours des trente dernières années, enseigne comment mesurer quantitativement l'information, à l'aide de l'entropie statistique. Celle-ci, déjà découverte en réalité par Boltzmann, est à la base de l'interprétation microscopique de l'entropie thermodynamique.

La théorie de l'information démontre l'expression de l'entropie statistique à partir d'hypothèses raisonnables sur les propriétés de la fonction qui doit servir à mesurer l'information. Nous nous contenterons ici de poser cette expression et d'explicitier succinctement ses principales propriétés.

#### *a) Définition.*

Considérons un ensemble discret fini d'événements possibles  $e_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ), de probabilités respectives  $P_m$  vérifiant bien sûr les conditions

$$0 \leq P_m \leq 1 \quad \forall m, \quad (5-a)$$

$$\sum_{m=1}^M P_m = 1 \quad (5-b)$$



Si l'une de ces probabilités,  $P_{m_0}$ , est égale à 1, toutes les autres sont nulles : l'événement  $e_{m_0}$  est certain, tous les autres impossibles. Dans ce cas, notre information est complète sur le résultat de l'expérience : il va être à coup sûr  $e_{m_0}$ . Par rapport à ce cas très particulier, toute autre distribution de probabilités  $\{P_m\}$  correspond à un certain manque d'information, que nous voulons chiffrer. C'est ce que fait l'entropie statistique  $S(P_1, P_2, \dots, P_M)$ , définie par

$$S(P_1, P_2, \dots, P_M) = -k \sum_{m=1}^M P_m \ln P_m \quad (6)$$

(avec  $P_m \ln P_m = 0$  si  $P_m = 0$ ). Cette définition comporte un facteur  $k$  positif que l'on peut choisir à sa convenance ; en mécanique statistique, on prend pour  $k$  la constante de Boltzmann (4).

#### *b) Principales propriétés.*

Il est facile de se convaincre, à partir de la définition (6), que l'entropie statistique possède toutes les propriétés que l'on est en droit d'attendre d'une mesure du manque d'information que l'on a sur un système.

Remarquons tout d'abord que la condition (5-a) vérifiée par les probabilités  $P_m$  entraîne que  $S$  est définie positive :

$$S \geq 0 \quad \forall \{P_m\}. \quad (7)$$

D'autre part,  $S$  est une fonction totale-ment symétrique de ses  $M$  arguments.

L'entropie statistique atteint son minimum, qui est  nul (cf. inégalité (7)), lorsque l'une quelconque des probabilités vaut 1, les autres étant alors toutes nulles :

$$S(0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) = 0 \quad (8)$$

Effectivement, le cas envisagé est celui que nous avons présenté au début du S a comme comportant une information complète ; il est donc naturel que le manque d'information y prenne la valeur nulle.

On démontre aisément que, pour M fixé, la fonction  $S(P_1, P_2, \dots, P_M)$  est maximum lorsque les M événements sont équiprobables, c'est-à-dire lorsque

$$P_1 = P_2 = \dots = P_M = \frac{1}{M} . \quad (9)$$

Ce maximum vaut

$$S_{\max} = k \ln M , \quad (10)$$

comme on le voit immédiatement en portant les valeurs (9) dans la définition (6). C'est effectivement dans le cas où toutes les probabilités sont égales que le manque d'information est maximum : rien ne permet alors d'indiquer que tel ou tel événement a plus de chances de se produire que les autres.

Notons enfin que, d'après la formule (10), la valeur maximale de l'entropie statistique croît avec le nombre d'événements possibles. Cette propriété est elle aussi conforme à l'idée intuitive que l'on se fait d'une mesure du manque d'information : si l'on est confronté à un ensemble d'événements équiprobables, l'information que l'on possède est évidemment d'autant moindre que le nombre d'événements possibles est plus grand.

Nous admettrons donc que l'entropie statistique (6) mesure quantitativement le manque d'information inhérent à une distribution de probabilités.

## **II - Une description probabiliste peut-elle être objective ?**

Faisons le point avant de poursuivre. L'entropie est, en thermodynamique, une propriété objective des systèmes macroscopiques.

D'autre part la réalité des molécules et atomes, bien que farouchement niée par certains thermodynamiciens jusqu'au début de ce siècle, ne peut plus actuellement être mise en doute. Le lien entre le comportement d'un système à l'échelle microscopique et ses propriétés macroscopiques se fait par la mécanique statistique, qui utilise les probabilités.

Ceci pose aussitôt un premier problème : si l'on sait seulement prédire la probabilité pour qu'une grandeur macroscopique donnée prenne telle ou telle valeur, la description du système au niveau macroscopique risque de rester "floue", c'est-à-dire incomplète et approximative. Il n'en est rien en fait, à cause de la "loi des grands nombres" : le nombre d'Avogadro  $N_A$ , qui caractérise le passage du microscopique au macroscopique (c'est le nombre de molécules contenues dans une mole d'un corps pur quelconque, par exemple 18 g d'eau ou 32 g d'oxygène), a une valeur tellement élevée ( $N_A \simeq 6 \times 10^{23}$ ) que la description probabiliste d'un système macroscopique est pratiquement certaine et exacte. On sait en effet d'après la théorie des probabilités que, si l'on réalise  $N$  expériences identiques dans lesquelles on mesure une grandeur particulière, les écarts que l'on va observer par rapport à la valeur moyenne attendue pour cette grandeur seront, en valeur relative, de l'ordre de  $1/\sqrt{N}$ ; dans un système macroscopique décrit par la mécanique statistique, ces "fluctuations" sont le plus souvent totalement négligeables, puisque la précision relative des prédictions est de l'ordre de  $1/\sqrt{N_A}$ , c'est-à-dire meilleure que  $10^{-11}$ .

Reste le problème de la "subjectivité" : l'entropie statistique définie par la formule (6) mesure le "manque d'information" que l'"on" a sur l'état microscopique du système ; est-il possible qu'un observateur particulier, plus "malin" que les autres, acquière une information supplémentaire sur le système et lui attribue donc une entropie inférieure à celle que mesurent

les autres observateurs ?

Pour analyser ce problème, on peut d'abord se demander de façon générale si les probabilités sont toujours nécessairement subjectives, ou s'il existe des situations où elles sont en réalité objectives. Etudions de ce point de vue quelques jeux de hasard qui permettent de saisir de façon concrète la notion de probabilité.

Lorsqu'un joueur de bridge, pour décider dans quel sens il va tenter une impasse, évalue la probabilité pour qu'une certaine carte se trouve dans la main de son adversaire de gauche, ce sont évidemment des probabilités "subjectives" qu'il manipule : la carte à laquelle il s'intéresse est en réalité chez l'un de ses adversaires et pas chez l'autre ; le but est de deviner où elle se trouve, et un joueur expérimenté sait utiliser l'information que lui ont fournie les annonces et les cartes déjà jouées pour déterminer si la carte en question a "plus de chances" de se trouver à gauche qu'à droite. De la même façon, si l'on étale sur une table un jeu de cartes, dont les dos sont seuls visibles, et que l'on parle de "la probabilité pour que telle carte particulière soit l'as de trèfle", il s'agit encore d'une probabilité "subjective" : l'"état" du jeu de cartes est parfaitement déterminé à partir du moment où il est disposé sur la table, et l'on a recours aux probabilités seulement parce que cet état n'est pas connu. Il n'est pas difficile d'imaginer, dans les deux exemples précédents, divers moyens que pourrait utiliser un "observateur" malin pour diminuer son "manque d'information".

Examinons au contraire les probabilités associées à un jeu de dés. Lorsqu'on jette un dé, son état final (le nombre qu'il affiche) peut en principe être calculé, en appliquant les lois de la mécanique, à partir de son état initial (sa position dans le cornet ou la main qui le lance, la vitesse qui lui est imprimée, la hauteur de la chute, ...). Il est pourtant sans espoir de mettre en pratique ce principe, comme chacun le sait pour avoir vainement

tenté de "sortir" un 6 en agissant sur l'état initial du dé. Dans ce cas, les probabilités sont vraiment objectives : tous les "observateurs" sont logés à la même enseigne (pourvu que l'on écarte toute possibilité de manipulations de prestidigitation). Soulignons que cette situation découle de l'extrême sensibilité du système par rapport à d'infimes modifications dans les conditions initiales ou les influences extérieures : les états finals correspondant à deux états initiaux très proches sont très différents ; cette instabilité du mouvement empêche en pratique toute prévision déterministe de l'état final et impose un traitement probabiliste objectif.

Notons cependant un point important. Supposons que le dé soit "pipé", c'est-à-dire construit de telle sorte que les probabilités d'apparition de ses six faces ne soient pas égales. Ces probabilités sont encore objectives, c'est-à-dire indépendantes de l'"observateur" (si l'on exclut les possibilités de trucage au lancement). Pour les déterminer, il n'y a pas d'autre moyen que de lancer le dé un très grand nombre de fois et de compter les fréquences d'apparition des six faces. Lorsqu'on n'a pas la possibilité d'effectuer une telle série d'essais pour mesurer les probabilités objectives, on doit se contenter de probabilités subjectives, différentes des précédentes : même si l'on sait pertinemment que le dé est pipé, on doit prendre des probabilités subjectives égales pour les six faces ; si en effet on les prenait différentes, on courrait le risque de s'éloigner davantage encore des probabilités objectives, car il se pourrait que l'on "favorise" subjectivement un résultat qui est en réalité "défavorisé" objectivement.

### **III - L'"objectivité" en mécanique statistique.**

Nous nous proposons maintenant de revenir à la mécanique statistique pour discuter l'"objectivité" de la description qu'elle propose

pour les systèmes macroscopiques.

1) Le postulat fondamental de la mécanique statistique.

Cette description est fondée sur le postulat physique suivant : "pour un système macroscopique isolé et à l'équilibre, tous les états microscopiques compatibles avec son état macroscopique sont également probables" (un système est considéré comme "isolé" s'il n'échange ni énergie ni particules avec l'extérieur). Notons immédiatement que la formule de Boltzmann (3) découle aussitôt de ce postulat : si  $\Omega$  est le nombre total d'états microscopiques permis, chacun d'eux a évidemment pour probabilité  $1/\Omega$ , et l'entropie statistique de cette distribution vaut  $k \ln \Omega$  d'après la relation (10).

Si l'on admet que l'on doit recourir aux probabilités, le postulat précédent est sans doute le seul que l'on puisse envisager : l'état macroscopique du système, que l'on suppose connu, ne privilégie aucun des états microscopiques qui sont compatibles avec lui ; en l'absence d'information supplémentaire, on ne peut que les considérer comme équiprobables. Mais ce postulat soulève deux questions fondamentales : en premier lieu, est-on dans une situation de probabilités objectives ? si oui, les probabilités subjectives que propose le postulat coïncident-elles avec les précédentes ?

C'est évidemment la première de ces deux questions qui conditionne l'ensemble. La seconde, bien qu'importante, est plus banale : elle se pose en effet, sous des formes légèrement différentes mais essentiellement équivalentes, pour tout postulat physique : la théorie qu'il fonde est-elle conforme à la réalité ?

## 2) Le problème ergodique.

Pour avancer dans l'analyse, il faut d'abord définir les probabilités que l'on veut utiliser. Depuis L. Gibbs (1839-1903), cette définition se fonde sur la notion d'"ensemble statistique". On imagine que l'on dispose d'un très grand nombre  $\mathcal{N}$  (infini à la limite) de répliques du système considéré, toutes préparées de la même façon à l'échelle macroscopique : on aura par exemple  $\mathcal{N}$  récipients de même volume remplis du même gaz sous la même pression et à la même température. Chacun des  $\mathcal{N}$  systèmes de l'ensemble se trouve, à un instant donné, dans un état microscopique déterminé. La probabilité  $P_\ell$ , à cet instant, d'un état microscopique particulier ( $\ell$ ) est par définition la limite, pour  $\mathcal{N}$  tendant vers l'infini, du rapport  $\mathcal{N}_\ell / \mathcal{N}$ , où  $\mathcal{N}_\ell$  est le nombre de systèmes de l'ensemble qui se trouvent dans l'état ( $\ell$ ) choisi :

$$P_\ell = \lim_{\mathcal{N} \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_\ell}{\mathcal{N}} \quad . \quad (11)$$

Autrement dit, la probabilité d'un état microscopique est en fait la probabilité pour que, si l'on choisit au hasard un système dans l'ensemble statistique, ce système se trouve dans l'état microscopique considéré. A l'équilibre macroscopique, les probabilités  $P_\ell$  sont indépendantes du temps.

Il est clair que les probabilités ainsi introduites sont objectives. Mais on n'a évidemment jamais affaire dans la réalité à un ensemble statistique de systèmes. Comment la définition précédente peut-elle concerner les propriétés d'un système unique ? On sait que, dans un système tel qu'un gaz, l'équilibre macroscopique recouvre en fait, au niveau microscopique, une "agitation thermique" désordonnée des molécules :

celles-ci se déplacent en tous sens à des vitesses de l'ordre de 500 m/s, et chacune d'elles subit plus de  $10^9$  collisions par seconde sur ses voisines. Une grandeur déterminée, par exemple le nombre de molécules situées dans un petit volume fixe délimité (par la pensée) dans le récipient contenant le gaz, fluctue sans arrêt au cours du temps. Ce mouvement des molécules devrait en principe être déterminé, par les lois de la mécanique, à partir de l'état microscopique du système à l'instant initial. Mais les équations du mouvement présentent, pour de tels systèmes, une instabilité par rapport à de très légères modifications des conditions initiales ou des forces s'exerçant de l'extérieur sur le système : on montre par exemple que, dans un échantillon de gaz, l'interaction gravitationnelle avec une personne située à quelques mètres, bien que ridiculement faible du point de vue énergétique, suffit à "désorienter" totalement une molécule (par rapport à la trajectoire qu'elle aurait eue en l'absence de la personne) au bout d'une dizaine de collisions seulement, c'est-à-dire de  $10^{-8}$  seconde ! Il s'ensuit qu'un système macroscopique change constamment, très rapidement et de façon imprévisible, d'état microscopique. C'est ce phénomène, appelé depuis Boltzmann le "chaos moléculaire", qui autorise et impose l'utilisation des probabilités.

Le "principe ergodique" consiste à admettre que les fluctuations temporelles aléatoires des propriétés d'un système macroscopique, qui se produisent sur des temps caractéristiques très courts par rapport à ceux que mettent en jeu les phénomènes macroscopiques, sont bien décrites par les probabilités définies à l'aide d'un ensemble statistique de systèmes identiques à celui que l'on étudie. De nombreux travaux ont été consacrés à cette question, pour tenter de justifier le principe ergodique à partir des lois de la mécanique. Le problème est compliqué, et les résultats moins probants qu'on ne pourrait le souhaiter ; c'est l'instabilité des équations du



mouvement microscopique, déjà évoquée ci-dessus, qui joue dans ce problème le rôle crucial. Le "principe ergodique" n'est pas vraiment démontré à partir de postulats plus fondamentaux, mais il est à la base même de la mécanique statistique, pour laquelle sa validité est essentielle.

### 3) Détermination des probabilités objectives.

Examinons maintenant la seconde des deux questions posées à la fin du § 1, puisque la première a reçu une réponse positive.

Sous la forme où nous l'avons énoncé plus haut, le postulat fondamental de la mécanique statistique fournit correctement les probabilités objectives qui interviennent dans la description des systèmes macroscopiques. Cette affirmation est évidemment la conclusion d'un long travail critique, qui a constamment montré l'aptitude de la mécanique statistique, fondée sur ce postulat, à expliquer et prédire les phénomènes réellement observés à l'échelle macroscopique.

Le postulat du § 1 concerne les systèmes isolés et à l'équilibre macroscopique. La description des processus hors d'équilibre, comme par exemple la détente d'un gaz auquel on offre brusquement une augmentation de volume (en lui ouvrant un compartiment initialement vide), nécessite un autre postulat, plus général que celui-ci. Au contraire, la description des systèmes non-isolés (pouvant échanger de l'énergie ou des particules avec l'extérieur) entre dans le cadre que nous avons esquissé : on applique le postulat fondamental au système global isolé que constituent le système étudié et les systèmes extérieurs avec lesquels il interagit. C'est ainsi par exemple que l'on peut analyser le comportement d'un système échangeant de la chaleur avec un "thermostat", ou "source de chaleur", de température  $T$  invariable : les états microscopiques accessibles à l'ensemble isolé système + thermostat étant tous également probables, on en déduit, pour le

système lui-même, que la probabilité  $P_\ell$  d'un de ses états microscopiques ( $\ell$ ), d'énergie  $E_\ell$ , a pour expression

$$P_\ell = \frac{1}{Z} e^{-E_\ell / kT}, \quad (12)$$

où  $Z$  est un facteur assurant la normalisation de la distribution de probabilités  $\{P_\ell\}$ , et  $k$  la constante de Boltzmann (4)

Une formulation plus générale du postulat fondamental a été proposée, fondée sur le "principe de Jaynes", qui est lui-même inspiré de la théorie de l'information. En voici les idées essentielles.

Dans le cas d'un système isolé, les états microscopiques compatibles avec un état macroscopique donné vérifient tous de la même façon les contraintes extérieures fixant l'état macroscopique ; rien ne privilégie a priori certains de ces états microscopiques permis par rapport aux autres. Leur attribuer des probabilités différentes serait dès lors erroné, car on ne possède aucune information permettant de le faire à bon escient. Notons que l'équiprobabilité correspond au maximum de l'entropie statistique (cf. § I-3-b). Lorsque le système étudié n'est pas isolé, les divers états microscopiques dans lesquels il peut se trouver a priori ne sont pas tous équivalents : si par exemple ce système échange de l'énergie avec un thermostat, un état microscopique dans lequel le système accapare presque toute l'énergie disponible n'est pas vraiment impossible, mais il est certainement moins probable que ceux où l'énergie est répartie de façon plus "équitable". On veut ici aussi déterminer la distribution de probabilités qui utilise toute l'information disponible, et seulement celle-là. Il faut pour cela choisir la distribution qui maximise l'entropie statistique dans la situation considérée : choisir une distribution différente de celle qui donne le maximum serait erroné, car cela reviendrait à introduire une information

supplémentaire, qu'on ne possède pas en réalité.

On remplace alors l'énoncé du § 1 par celui-ci : "à l'équilibre macroscopique, la distribution des états microscopiques est, parmi toutes celles qui vérifient les contraintes extérieures imposées au système, celle qui rend l'entropie statistique maximum".

Ce nouvel énoncé paraît plus général que le précédent, qu'il englobe comme un cas particulier. Mais il fournit évidemment des probabilités subjectives, et il faut à nouveau se demander si elles coïncident en toutes circonstances avec les probabilités objectives. Une analyse un peu plus détaillée montre que non. Par exemple, l'application de ce "postulat généralisé" aboutit à la distribution "canonique" (12) pour tout système échangeant de la chaleur avec l'extérieur, quelle que soit la nature de cet "extérieur" ; or cette distribution canonique n'est valable que si les échanges de chaleur s'effectuent avec un système extérieur suffisamment grand pour que sa température reste invariable (ceci apparaît clairement dans la démonstration fondée sur le postulat initial). On se trouve ici dans une situation analogue à celle qui a été explicitée, pour un dé "pipé", à la fin du § II : le système étudié peut effectivement être décrit par des probabilités ; mais l'information que l'on possède (le système échange de la chaleur avec l'extérieur) n'est pas suffisante pour que les probabilités subjectives qu'on en déduit reproduisent correctement les probabilités objectives.

#### **IV - Conclusion.**

Bien que toutes les questions que l'on peut légitimement se poser n'aient pas reçu de réponse parfaitement satisfaisante, il semble acquis que l'entropie d'un système macroscopique à l'équilibre est une propriété

objective de ce système. Son interprétation en termes de "manque d'information" introduit apparemment une composante subjective, mais celle-ci disparaît si l'on choisit et utilise correctement le postulat fondamental de la mécanique statistique : le "manque d'information" devient alors lui-même une caractéristique du système et de sa situation objective.

Bien entendu, ces considérations ne sont valables que pour l'étude physique des systèmes macroscopiques. A travers sa définition statistique, l'entropie peut être utilisée dans d'autres problèmes où interviennent les probabilités ; la question de son "objectivité" se pose alors de façon différente, et peut même, dans certains cas, ne présenter qu'un intérêt mineur.