

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JOSEPH HOROWITZ

Une remarque sur les bimesures

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 59-64

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__59_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE REMARQUE SUR LES BIMESURES

par Joseph Horowitz

Soient (E, \mathcal{E}) , (F, \mathcal{F}) deux espaces mesurables, $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ le produit cartésien de \mathcal{E} et de \mathcal{F} (à distinguer de la tribu produit notée $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$). Une bimesure est une fonction $\mu : \mathcal{E} \times \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ telle que

- i) $A \rightarrow \mu(A, B)$ est une fonction σ -additive sur \mathcal{E} pour tout $B \in \mathcal{F}$
- ii) $B \rightarrow \mu(A, B)$ est une fonction σ -additive sur \mathcal{F} pour tout $A \in \mathcal{E}$.

Les bimesures positives (i.e. ≥ 0) ont été introduites par Kingman [3] dans son travail sur les mesures de Poisson, et je crois qu'elles seraient utiles dans les applications au "monde réel" . Dellacherie et Meyer disent [1, III.74] que la notion de bimesure "n'est pas d' une importance..." ; bien sûr, il est aussi possible que le monde réel n'ait pas d'importance. De toute façon, c'est la conclusion principale de (1) et (4) ci-dessous, parce qu'une bimesure est en réalité une mesure.

Etant donnée une bimesure positive μ , Kingman [3] a énoncé (sans démonstration, dans le cas où (F, \mathcal{F}) est \mathbb{R} muni de sa tribu borélienne) l'assertion suivante :

- (1) Il existe une mesure M sur $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ telle que $M(A \times B) = \mu(A, B)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$.

Cette assertion a été prouvée par Morando [4] sous les hypothèses

- (2a) μ est positive et $\mu(E, F) < \infty$.
- (2b) \mathcal{F} contient une classe compacte \mathcal{K} telle que

$$\text{pour tout } (A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F} \quad \mu(A, B) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ K \subset B}} \mu(A, K)$$

Le même genre de théorème paraît dans le livre [1] sous une hypothèse un peu plus forte que (2b) :

(2c) E, F sont des espaces métriques séparables, μ est une mesure tendue en chacun de ses arguments, l'autre étant fixé.

La conclusion aussi est un peu plus forte : M est une mesure tendue.

Remarquons ici que les hypothèses (2a) et (2b) peuvent être remplacées par les suivantes (μ étant toujours supposée positive)

(3a) F est un sous-espace universellement mesurable d'un espace métrique compact, \mathcal{F} est sa tribu borélienne.

(3b) $A \rightarrow \mu(A, F)$ est une mesure σ -finie sur E .

Il suffit de prendre une suite (A_n) d'éléments disjoints de \mathcal{E} , tels que $\mu(A_n, F) < \infty$, $\bigcup_n A_n = E$, et d'appliquer le théorème de Morando sur chaque $A_n \times F$. Mais voici une autre méthode. Pour f bornée \mathcal{F} -mesurable, soit $\mu(A, f) = \int \mu(A, dy) f(y)$. Alors on voit que $\mu(\cdot, f)$ est une mesure absolument continue par rapport à $\mu(\cdot, F)$ dont la densité $h(\cdot, f)$ est essentiellement bornée, et $h(\cdot, 1) = 1$ $\mu(\cdot, F)$ -p.s.. L'application $f \rightarrow h(\cdot, f)$ est alors " presque markovienne " au sens de [2], et il existe donc un noyau markovien $H(x, dy)$ tel que $H(\cdot, f) = h(\cdot, f)$ $\mu(\cdot, F)$ -p.s.. La mesure M est alors donnée par

$$M(g) = \iint_{EF} g(x, y) H(x, dy) \mu(dx, F) \text{ si } g \text{ est } \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}\text{-mesurable } \geq 0.$$

Nous allons maintenant étudier le cas où μ est une bimesure finie, mais non nécessairement positive. Nous gardons l'hypothèse (3a), et nous avons :

(4) THEOREME. Il existe une mesure finie (signée) M sur $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ telle que $\mu(A, B) = M(A \times B)$ si et seulement si

$$(5) \quad \sup \sum_i |\mu(A_i, B_i)| < \infty$$

le sup étant pris sur toutes les familles finies $(A_i, B_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$, telles que les rectangles $A_i \times B_i$ soient disjoints.

La condition est évidemment nécessaire, car s'il existe une mesure M comme dans l'énoncé, l'expression (5) est plus petite que la variation totale de M. Inversement, supposons que (5) ait lieu. Définissons pour

$A \in \mathcal{E}$

$$v(A) = \sup_{i \in I} \sum |\mu(A_i, B_i)|$$

où $\{A_i \times B_i, i \in I\}$ parcourt l'ensemble des familles finies de rectangles disjoints tels que $A_i \subset A$. Alors $0 \leq v(A) < \infty$. Montrons que v est une mesure sur \mathcal{E} . Soit C_n une suite disjointe d'éléments de \mathcal{E} . Alors

$$\begin{aligned} v\left(\bigcup_n C_n\right) &= \sup \sum_i |\mu(A_i, B_i)| \quad (\text{avec } A_i \subset \bigcup_n C_n) \\ &= \sup \sum_i |\sum_n \mu(A_i \cap C_n, B_i)| \\ &\leq \sup \sum_i \sum_n |\mu(A_i \cap C_n, B_i)| \leq \sum_n v(C_n). \end{aligned}$$

Etant donné $\varepsilon > 0$ choisissons pour tout n une famille finie de rectangles disjoints $A_i^n \times B_i^n$ ($i=1, \dots, N_n$) telle que $A_i^n \subset C_n$ et

$$\sum_{i=1}^{N_n} |\mu(A_i^n, B_i^n)| > v(C_n) - \varepsilon/2^n$$

alors

$$\sum_n \sum_{i=1}^{N_n} |\mu(A_i^n, B_i^n)| > \sum_n v(C_n) - \varepsilon$$

et par conséquent, pour N assez grand

$$\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{N_n} |\mu(A_i^n, B_i^n)| > \sum_n v(C_n) - \varepsilon.$$

Mais la "grande famille" $\{A_i^n \times B_i^n, 1 \leq n \leq N, 1 \leq i \leq N_n\}$ est finie, disjointe et $A_i^n \subset \bigcup_n C_n$; donc $v(\bigcup_n C_n) \geq \sum_n v(C_n) - \varepsilon$, d'où l'assertion.

Définissons pour f bornée \mathcal{F} -mesurable $\mu(A, f) = \int_{\mathcal{F}} \mu(A, dy) f(y)$. Soit $\mu'(A, \cdot)$ la mesure variation totale de la mesure $\mu(A, \cdot)$ sur \mathcal{F}

$$\mu'(A, B) = \sup_{\sum B_i = B} \sum_i |\mu(A, B_i)|$$

Alors $\mu'(A, B) \leq v(A)$, et on voit aussitôt que $|\mu(A, f)| \leq \|f\| \mu'(A, \mathcal{F}) \leq \|f\| v(A)$ (où $\|f\| = \sup_y |f(y)|$). Par conséquent, $\mu(\cdot, f)$ est une mesure absolument continue par rapport à v , dont la densité $h(\cdot, f)$ est essentiellement bornée par $\|f\|$. L'opération $f \rightarrow h(\cdot, f)$ est aussi "presque linéaire", c'est à dire que $h(\cdot, af + bg) = ah(\cdot, f) + bh(\cdot, g)$ v-p.s. (f, g \mathcal{F} -mesurables bornées, $a, b \in \mathbb{R}$) et en fait $h(\cdot, \sum_n f_n) = \sum_n h(\cdot, f_n)$ p.s. si les f_n sont positives et $\sum_n f_n$ est bornée. Nous allons montrer dans un instant qu'il existe deux applications positives $f \rightarrow h^\pm(\cdot, f)$ possédant les mêmes propriétés, telles que $h(\cdot, f) = h^+(\cdot, f) - h^-(\cdot, f)$ - c'est un résultat général sans doute bien connu, mais je trouve plus facile de le

démontrer que de le chercher dans Bourbaki . D'après [2], il existe deux noyaux (sous)-markoviens $H^\pm(x, dy)$ tels que $h^\pm(\cdot, f) = \int H^\pm(\cdot, dy) f(y)$ p.s., et alors si l'on pose pour f \mathcal{E} -mesurable bornée

$$M^\pm(f) = \iint_{EF} f(x, dy) H^\pm(x, dy) \nu(dx)$$

la mesure cherchée est $M = M^+ - M^-$.

Voici le théorème dont nous avons besoin. Nous écrivons hf au lieu de $h(\cdot, f)$.

(6) THEOREME. Soit $f \rightarrow hf$ une application de l'espace $b(\mathcal{F})$ des fonctions \mathcal{F} -mesurables bornées dans l'espace $L^\infty(E, \mathcal{E}, \nu)$, telle que

i) $|hf| \leq \|f\|$ p.s. .

ii) $h(af+bg) = ahf + bhg$ p.s. ($a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in b(\mathcal{F})$)

iii) $h(\sum_n f_n) = \sum_n hf_n$ ($f_n \geq 0$, $\sum_n f_n \in b(\mathcal{F})$)

Alors il existe deux applications h^\pm possédant les mêmes propriétés et de plus

iv) $f \geq 0 \Rightarrow h^\pm f \geq 0$ p.s.

et telles que $h = h^+ - h^-$.

Rappelons rapidement la définition du supremum essentiel d'une famille quelconque $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions mesurables, disons uniformément bornée en valeur absolue (voir [5, p.43] pour le cas général) sur l'espace mesuré fini (E, \mathcal{E}, ν) . Posons

$$\alpha = \sup_J \int (\sup_{i \in J} f_i) d\nu$$

J parcourant l'ensemble des parties dénombrables de I . Il existe alors un J tel que $\alpha = \int (\sup_{i \in J} f_i) d\nu$, et l'on pose alors

$$\sup_{i \in I} \text{ess } f_i = \sup_{i \in J} f_i \quad \text{p.s. .}$$

D'autre part, il suffit de définir $h^+ f$ pour $f \geq 0$ et de vérifier (i)-(iii) dans ce cas (avec $a, b \geq 0$). On définira alors $h^+ f$ pour $f \in b(\mathcal{F})$ comme $h^+(f^+) - h^+(f^-)$, où $f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f) \vee 0$ comme d'habitude.

Définissons pour $f \geq 0$

$$(7) \quad h^+ f = \sup_{0 \leq g \leq f} \text{ess } hg$$

Alors h^+ satisfait à la condition iv) parce que $h(0) = 0$ p.s., et l'on a

$h^+(af) = ah^+f$ pour $a \geq 0$.

$$1^\circ) h^+(f_1+f_2) = h^+(f_1)+h^+(f_2) \quad (f_1, f_2 \geq 0)$$

Nous avons

$$h^+(f_1+f_2) = \sup_{0 \leq g \leq f_1+f_2} \text{ess } hg$$

Pour une telle g soit $g_1 = f_1 \wedge g$, $g_2 = g - g_1$. Alors $g = g_1 + g_2$, $g_i \leq f_i$ ($i=1,2$)

et ainsi

$$h^+(f_1+f_2) = \sup_{0 \leq g \leq f_1+f_2} \text{ess } (hg_1+hg_2) \leq h^+f_1 + h^+f_2.$$

Soient ensuite $\{g_1^1\}, \{g_1^2\}$ des familles dénombrables telles que $0 \leq g_i^1 \leq f_1$, $0 \leq g_j^2 \leq f_2$ et

$$h^+f_1 = \sup_i hg_i^1, \quad h^+f_2 = \sup_j hg_j^2$$

Alors

$$\begin{aligned} h^+f_1+h^+f_2 &= \sup_{i,j} (hg_i^1+hg_j^2) = \sup_{i,j} h(g_i^1+g_j^2) \text{ p.s.} \\ &\leq h^+(f_1+f_2) \end{aligned}$$

et $1^\circ)$ est démontré.

$$2^\circ) h^+(\sum_n f_n) = \sum_n h^+f_n \quad (f_n \geq 0, \sum_n f_n \in b(\mathcal{F}))$$

D'abord $h^+(\sum_1^{\infty} f_n) \geq h^+(\sum_1^N f_n) = \sum_1^N h^+f_n$ pour tout N d'après $1^\circ)$,

$$\text{donc } h^+(\sum_n f_n) \geq \sum_n h^+f_n.$$

Etant donnée g telle que $0 \leq g \leq \sum_n f_n$, on peut trouver des g_n telles que $0 \leq g_n \leq f_n$, $g = \sum_n g_n$. Je vais le démontrer dans un instant, mais en utilisant ce fait nous avons

$$h^+(\sum_n f_n) = \sup_{0 \leq g \leq \sum_n f_n} \text{ess } hg = \sup_{0 \leq g \leq \sum_n f_n} \text{ess } \sum_n hg_n \leq \sum_n h^+f_n$$

i.e. le résultat cherché. Enfin, pour construire les g_n , soit

$$g_n = \left(g - \sum_1^{n-1} f_i \right) I \left[\sum_1^{n-1} f_i \leq g < \sum_1^n f_i \right]^+ \quad f_n I \left[g \geq \sum_1^n f_i \right]$$

Finalement, on voit grâce à (7) que $h^+f \geq hf$ pour toute f positive,

donc $h^-f = h^+f - hf$ satisfait à iv) et le théorème 6 est démontré.

REFERENCES

1. C. Dellacherie et P.A. Meyer. Probabilités et Potentiels (2^e dition)
2. R. Gettoor. On the construction of kernels. Sém. de Prob. IX, Lecture Notes in Math. n° 465, Springer-Verlag.
3. J.F.C. Kingman. Completely random measures. Pacific J. Math. 21, 1967, p. 59-79.
4. Ph. Morando. Mesures aléatoires. Sém. de Prob. III, Lecture Notes in Math. n°88, Springer-Verlag.
5. J. Neveu. Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson.