SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHING SUNG CHOU

Extension au cas continu d'un théorème de Dubins

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 132-133
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__132_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

EXTENSION AU CAS CONTINU D'UN THEOREME DE L.E. DUBINS

par Ching-Sung CHOU

Très récemment, M. P.A. Meyer m'a envoyé un article de Dubins [1] et m'a indiqué " il me semble que les résultats de cet article n'ont jamais été étendus au cas continu". Nous lui exprimons nos remerciements pour cette suggestion.

Voici l'énoncé du théorème de Dubins :

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_n)_{n\in N})$ un espace probabilisé filtré, et soit $X=(X_n)$ une surmartingale à valeurs dans $[0,1]$. On associe à X le processus croissant des variances conditionnelles

$$V_n^X = E[(X_1-X_0)^2|\underline{\underline{F}}_0] + \ldots + E[(X_n-X_{n-1})^2|\underline{\underline{F}}_{n-1}]$$

Alors on a

(1) $$E[V_\infty^X|\underline{\underline{F}}_0] \leqq X_0(2-X_0) \text{ p.s. }.$$

Cette inégalité est " sharp" : il existe des surmartingales X pour lesquelles la borne est atteinte.

Avant d'étendre cela au cas continu, nous voulons transformer le résultat de Dubins. Tout d'abord, nous remplaçons X par $Y=1-X$, sousmartingale à valeurs dans $[0,1]$. On a $V^X=V^Y$, et (1) s'écrit

(2) $$E[V_\infty^Y|\underline{\underline{F}}_0] \leqq 1-Y_0^2 \text{ p.s. }.$$

Ensuite, puisqu'il y a un symbole $E[.|\underline{\underline{F}}_0]$, le conditionnement dans la définition de V_n^Y (qui revient à travailler sur le processus croissant $\langle Y,Y\rangle$) est inutile, et (2) s'écrit simplement, en faisant passer Y_0^2 du côté gauche

(3) $$E[[Y,Y]_\infty|\underline{\underline{F}}_0] \leqq 1 \text{ p.s. }.$$

Il suffit de vérifier que $E[[Y,Y]_n|\underline{\underline{F}}_0] \leqq 1$ pour tout n , ou encore (comme Y est à valeurs dans $[0,1]$) que $E[[Y,Y]_n|\underline{\underline{F}}_0] \leqq E[Y_n^2|\underline{\underline{F}}_0]$, et finalement on se trouve ramené à la proposition suivante :

PROPOSITION 1 . Si Y est une sousmartingale positive, avec $Y_n\in L^2$ pour tout n , le processus $Y^2-[Y,Y]$, nul en 0, est une sousmartingale.

Démonstration . $E[Y_{n+1}^2-Y_n^2-(Y_{n+1}-Y_n)^2|\underline{\underline{F}}_n] = 2Y_nE[Y_{n+1}-Y_n|\underline{\underline{F}}_n] \geqq 0$.

Maintenant nous allons passer au cas continu. Soit (X_t) une surmartingale continue à droite sur un espace probabilisé $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P, (\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0})$ satisfaisant aux conditions habituelles, à valeurs dans $[0,1]$. Nous voulons établir la formule

(1') $$E[\langle X,X\rangle_\infty | \underline{\underline{F}}_0] \leqq 2X_0 \quad , \quad \text{ou } E[[X,X]_\infty | \underline{\underline{F}}_0] \leqq 2X_0$$

qui correspond à (1), où l'on a ajouté X_0^2 des deux côtés. Pour cela, on écrit cette inégalité pour la surmartingale discrète $X_{k/2^n}$, et on utilise le fait que

$$X_0^2 + \Sigma_k \, (X_{(k+1)/2^n} - X_{k/2^n})^2 \quad \text{converge en probabilité vers } [X,X]_\infty$$

lorsque $n \to \infty$, et le lemme de Fatou.

Mais il est plus intéressant d'établir dans le cas continu l'analogue de la proposition 1 :

PROPOSITION 2. <u>Si</u> (Y_t) <u>est une sousmartingale positive continue à droite, avec</u> $Y_t \in L^2$ <u>pour tout</u> t, <u>le processus</u> $Y^2-[Y,Y]$ <u>est une sousmartingale</u>.

<u>Démonstration</u>. Nous remarquons d'abord (inégalité de Doob) que $\|Y_t^*\|^2 \leqq 2\|Y_t\|_2$, donc Y appartient à la classe (D) sur tout intervalle $[0,t]$, et admet une décomposition $Y=M+A$, où M est une martingale, A un processus croissant prévisible nul en 0. En appliquant le théorème 52' de [2], p.56, à la surmartingale $E[Y_t|\underline{\underline{F}}_s]-Y_s$ sur l'intervalle $[0,t]$, on voit que $M_t \in L^2$ pour tout t, donc aussi $A_t \in L^2$ pour tout t.

Nous avons $Y_t^2-[Y,Y]_t = 2\int_0^t Y_{s-}dY_s = 2\int_0^t Y_{s-}dA_s + 2\int_0^t Y_{s-}dM_s$. Le processus $\int_0^t Y_{s-}dA_s$ est croissant et intégrable pour t fini

$$E[\int_0^t Y_{s-}dA_s] \leqq E[Y_t^* A_t] \leqq \|Y_t^*\|_2 \|A_t\|_2$$

et la martingale locale $\int_0^t Y_{s-}dM_s]$ est une vraie martingale, car

$$E[(\int_0^t Y_{s-}^2 d[M,M]_s)^{1/2}] \leqq E[Y_t^*[M,M]_t^{1/2}] \leqq \|Y_t^*\|_2 (E[[M,M]_t])^{1/2} < \infty .$$

La proposition est établie.

REFERENCES

[1]. L.E. Dubins. Sharp bounds for the variance of uniformly bounded semimartingales. Ann. Math. Stat. 43, 1972, p.1559-1565.

[2]. P.A. Meyer. Martingales and stochastic integrals. Lecture Notes in mathematics, n° 284 , Springer-Verlag 1972.

Chou Ching Sung
Mathematics Department
National Central University
Chung-Li, Taiwan
Republic of China