SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE LÉPINGLE

Sur le comportement asymptotique des martingales locales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 148-161
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__148_0>

SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES MARTINGALES LOCALES

par D. LEPINGLE

Nous présentons sous ce titre diverses propriétés du comportement à l'infini des trajectoires des martingales locales. Certaines ne sont que la traduction, au prix de quelques difficultés techniques, de résultats bien connus dans le cas discret ou dans le cas des trajectoires continues. D'autres sont des illustrations du principe qui veut que, grâce à la décomposition de B. DAVIS [1], certaines propriétés asymptotiques des martingales locales (ou des processus croissants) à sauts bornés dans L^∞ sont encore vraies lorsqu'ils sont seulement bornés dans L^1. Nous terminons par la partie facile de la loi du logarithme itéré, qui est ici l'occasion d'une longue digression sur une famille de surmartingales exponentielles.

Nous nous plaçons sur un espace de probabilité complet $(\Omega,\mathcal{F},P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ satisfaisant aux conditions habituelles. La notation M désignera toujours une martingale locale continue à droite, pourvue de limites à gauche (càdlàg) et nulle en zéro. Pour tout processus càdlàg X nul en zéro, et tout temps d'arrêt T, nous poserons

$$\begin{aligned} \Delta X_T &= 0 && \text{sur } \{T = 0\}\cup\{T = \infty\} \\ &= X_T - X_{T-} && \text{sur } \{0 < T < \infty\} \end{aligned}$$

Enfin, si A est un processus croissant, nous poserons

$$A_\infty = \lim_{t \to \infty} A_t .$$

1 - LA LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES

Commençons par un résultat bien connu en temps discret [6,8] ou pour des martingales locales continues [4] ; il est établi dans le cas général en [5], avec une autre démonstration.

PROPOSITION 1. Si M est localement de carré intégrable, sur l'ensemble $\{ < M,M >_\infty < \infty \}$, M_t converge p.s. vers une limite finie lorsque t tend vers l'infini.

PREUVE. Soient $a > 0$ et

$$T = \inf \{ t : < M,M >_t \geq a \} .$$

Soit (T_n) une suite annonçant le temps d'arrêt prévisible T. Lorsque n tend vers l'infini,

$$E\left[<M,M>_{T_n}\right] \to E\left[<M,M>_{T-}\right] \leqslant a .$$

Si $n < m$, en considérant la martingale $M_t^{T_m} - M_t^{T_n}$, nous avons successivement

$$E\left[\sup_t (M_{T_m \wedge t} - M_{T_n \wedge t})^2\right] \leqslant 4\, E\left[<M,M>_{T_m} - <M,M>_{T_n}\right]$$

$$E\left[\sup_{T_n \leqslant u \leqslant t \leqslant T_m} (M_t - M_u)^2\right] \leqslant 16\, E\left[<M,M>_{T_m} - <M,M>_{T_n}\right]$$

$$E\left[\sup_{T_n \leqslant u \leqslant t < T} (M_t - M_u)^2\right] \leqslant 16\, E\left[<M,M>_{T-} - <M,M>_{T_n}\right]$$

et en faisant tendre n vers l'infini, nous vérifions que M_t converge p.s. vers une limite finie quand t tend vers l'infini sur l'ensemble $\{T = \infty\}$. Il reste à faire varier a ∎

Nous pouvons préciser le comportement de M sur l'ensemble $\{<M,M>_\infty = \infty\}$. Comme dans le cas discret [8], la démonstration repose sur un "lemme de Kronecker".

LEMME 1. Soit B un processus croissant prévisible avec $B_0 > 0$ p.s. Si l'intégrale stochastique

$$Z = \frac{1}{B} \cdot M$$

converge p.s. quand t tend vers l'infini vers une limite finie, alors

$$\lim_{t \to \infty} \frac{M_t}{B_t} = 0 \qquad \text{p.s. sur l'ensemble } \{B_\infty = \infty\} .$$

PREUVE. Nous allons intégrer par parties [7, p. 315] :

$$M_t = \int_0^t B_s\, dZ_s = B_t Z_t - \int_0^t Z_{s-}\, dB_s = \int_0^t (Z_t - Z_{s-})\, dB_s .$$

Si $0 < u < t < \infty$,

$$\left|\frac{M_t}{B_t}\right| \leqslant \frac{1}{B_t} \left| \int_0^u (Z_t - Z_{s-}) dB_s \right| + \frac{1}{B_t} (B_t - B_u) \sup_{u < s \leqslant t} |Z_t - Z_{s-}|$$

La conclusion s'obtient en faisant tendre t, puis u vers l'infini ∎

THEOREME 1. Si M est localement de carré intégrable et si f est une application croissante de $[0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ telle que

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(f(t))^2} < \infty ,$$

alors

$$\frac{M_t}{f(<M,M>_t)} \to 0 \quad \text{p.s.} \quad \text{sur } \{ <M,M>_\infty = \infty \} .$$

PREUVE. Posons $A = <M,M>$, $Z = \frac{1}{f(A)} . M$, $C_s = \inf \{ t : A_t > s \}$.

Comme $A_{C_s} \geq s$ pour tout $s < A_\infty$,

$$<Z,Z>_\infty = \int_0^\infty \frac{dA_s}{(f(A_s))^2} = \int_0^{A_\infty} \frac{ds}{(f(A_{C_s}))^2} \leq \int_0^\infty \frac{dt}{(f(t))^2}$$

Il en résulte que Z est de carré intégrable et converge p.s. Il reste à appliquer le résultat du lemme 1 à $B = f(A)$ sur l'ensemble $\{ A_\infty = \infty \} = \{ B_\infty = \infty \}$∎

2 - LE LEMME DE BOREL-CANTELLI

En [2], Dubins et Freedman utilisent le théorème 1, qu'ils démontrent pour $f(t) = 1 + t$, pour obtenir un renforcement du lemme classique de Borel-Cantelli. Nous allons faire de même en élargissant un peu les hypothèses.

THEOREME 2. Soit A un processus adapté nul en zéro vérifiant

$$E \left[\sup_t \Delta A_t \right] < \infty .$$

Si $\tilde{A}$ est le compensateur prévisible de A , alors

$$\{ A_\infty = \infty \} = \{ \tilde{A}_\infty = \infty \} \text{ p.s.} ,$$

et sur cet ensemble

$$\frac{A_t}{\tilde{A}_t} \to 1 \quad \text{p.s. quand } t \text{ tend vers l'infini.}$$

PREUVE. i/ Montrons que $\{ A_\infty < \infty \} = \{ \tilde{A}_\infty < \infty \}$ p.s. (voir [6] en temps discret, [5] en temps continu). Si $a > 0$, soit

$$T = \inf \{ t : \tilde{A}_t \geq a \} .$$

Le temps T est prévisible, et si (T_n) annonce T, de

$$E[A_{T_n}] = E[\tilde{A}_{T_n}] < a$$

résulte que $E[A_{T-}] \leq a$, donc $\{A_\infty < \infty\}$ p.s. sur $\{T = \infty\} \supset \{\tilde{A}_\infty < a\}$.

On fait ensuite varier a pour obtenir $\{A_\infty < \infty\} \supset \{\tilde{A}_\infty < \infty\}$ p.s. Inversement, si

$S = \inf\{t : A_t > a\}$,

$E[\tilde{A}_S] = E[A_S] \leq a + E[\sup_t \Delta A_t] < \infty$,

donc $\{\tilde{A}_\infty < \infty\} \supset \{A_\infty < \infty\}$ p.s.

ii/ Supposons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\Delta A \leq c$. La martingale locale

$$M = A - \tilde{A}$$

n'a pas de partie continue, et comme ses sauts sont bornés par c, elle est localement de carré intégrable. Sur l'ensemble $\{<M,M>_\infty < \infty\}$, d'après la proposition 1, M_t converge p.s. vers une limite finie, donc

$$\frac{M_t}{\tilde{A}_t} \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{A_t}{\tilde{A}_t} \to 1 \quad \text{p.s.} \quad \text{sur} \quad \{A_\infty = \infty\} \cap \{<M,M>_\infty < \infty\}.$$

Sur l'ensemble $\{<M,M>_\infty = \infty\} \cap \{A_\infty = \infty\}$, écrivons

$$\frac{M_t}{\tilde{A}_t} = \frac{M_t}{<M,M>_t} \; \frac{<M,M>_t}{\tilde{A}_t}$$

Le premier rapport de ce produit tend vers zéro d'après le théorème 1 appliqué à $f(t) = 1 + t$. Le second rapport est borné par $2c$, car le compensateur prévisible de $\sum_{s \leq t} \Delta M_s^2$ est majoré par c fois le compensateur prévisible de $\sum_{s \leq t} |\Delta M_s|$, lui-même majoré par $2\tilde{A}_t$: on vérifie cette dernière inégalité

en constatant que si T est totalement inaccessible, $\Delta A_T = \Delta M_T$, donc $\Delta A_T 1_{\{T \leq t\}}$ et $\Delta M_T 1_{\{T \leq t\}}$ ont même compensateur prévisible, tandis que

si T est prévisible,

$$\begin{aligned} E[|\Delta M_T| \mid \mathcal{F}_{T-}] &= E[|\Delta A_T - E[\Delta A_T \mid \mathcal{F}_{T-}]| \mid \mathcal{F}_{T-}] \\ &\leq 2E[\Delta A_T \mid \mathcal{F}_{T-}] \\ &\leq 2\Delta\tilde{A}_T . \end{aligned}$$

iii/ Supposons seulement $E\left[\sup_t \Delta A_t\right] < \infty$, et posons

$$S_t = \sup_{s \leq t} \Delta A_s$$

$$K_t = \sum_{s \leq t} \Delta A_s \, 1_{\{\Delta A_s \geq 2 S_{s-}\}}$$

$$L_t = A_t - K_t$$

Sur $\{\Delta A_s \geq 2 S_{s-}\}$, $2 S_{s-} + \Delta K_s \leq 2 \Delta A_s \leq 2 S_s$,

donc $K_\infty \leq 2 S_\infty$ tandis que $\Delta L_t \leq 2 S_{t-}$. Si $\tilde{K}$ $(\tilde{L})$ représente le compensateur prévisible de K (L), nous avons

$$E[K_\infty] = E[\tilde{K}_\infty] < \infty,$$

$$\tilde{A} = \tilde{K} + \tilde{L}.$$

Si nous posons

$$T_n = \inf\{t : S_{t-} \geq n\},$$

alors ΔL^{T_n} est borné par $2 S_{T_{n-}} \leq 2n$, d'où

$$\frac{L_t}{\tilde{L}_t} = \frac{L_t^{T_n}}{\tilde{L}_t^{T_n}} \to 1 \text{ p.s. sur } \{L_\infty = \infty\} \cap \{T_n = \infty\}.$$

Pour terminer nous remarquons que $\{A_\infty = \infty\} = \{L_\infty = \infty\}$ p.s. et $\Omega = \bigcup_n \{T_n = \infty\}$ p.s. ∎

3 - UNE FAMILLE DE SURMARTINGALES EXPONENTIELLES

On sait que la démonstration de la loi du logarithme itéré pour le mouvement brownien comme pour les martingales discrètes utilise des inégalités maximales obtenues à partir de surmartingales exponentielles. Nous allons d'abord définir et étudier ces surmartingales.

Rappelons [10] que la mesure de Lévy ν de la martingale locale M est la famille de noyaux $\nu_t(\omega, dx)$ définis sur les boréliens de $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ telle que si le processus

$$\sum_{s \leq t} |f(\Delta M_s)| \, 1_{\{\Delta M_s \neq 0\}}$$

(où f est une fonction réelle borélienne sur $\mathbb{R}^*$) est localement intégrable, alors le compensateur prévisible du processus

$$\sum_{s \leq t} f(\Delta M_s)\, 1_{\{\Delta M_s \neq 0\}}$$

est donné par

$$\int f(x)\, \nu_t\,(dx)\ .$$

Introduisons alors le processus

$$\alpha(M)_t = \exp\{M_t - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t - \int (e^x - 1 - x)\, \nu_t(dx)\ \}\ .$$

Nous aurons besoin du résultat suivant [10] , qui se démontre en appliquant la formule de changement de variables.

LEMME 2. <u>Si</u> M <u>est quasi-continue à gauche et si</u> $\sum_{s \leq t} (e^{\Delta M_s} - 1 - \Delta M_s)\, 1_{\{\Delta M_s \neq 0\}}$ <u>est localement intégrable,</u> $\alpha(M)$ <u>est une martingale locale.</u>

Que se passe-t-il dans le cas général ?

PROPOSITION 2. <u>Le processus</u> $\alpha(M)$ <u>est une surmartingale positive.</u>

PREUVE. Posons $M = M^p + M^q$, où M^p est la somme compensée des sauts prévisibles de M , et M^q est quasi-continue à gauche. Pour tout $t < \infty$, M_t^p est la limite en probabilité quand $n \to \infty$ de

$$M_t^{p,n} = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_{T_k}\, 1_{\{T_k \leq t\}}\ ,$$

où (T_k) est une suite de temps d'arrêt prévisibles de graphes disjoints épuisant les sauts de M^p , et nous avons

$$\alpha(M^{p,n})_t = \exp\{\ M_t^{p,n} - \sum_{k=1}^{n} E\left[\ e^{\Delta M_{T_k}} - 1\ | \mathfrak{F}_{T_k -}\ \right] 1_{\{T_k \leq t\}}\ \}\ .$$

Si T est un temps d'arrêt tel que

$$\sum_{k=1}^{n} E\left[\ \exp \Delta M_{T_k}\ | \mathfrak{F}_{T_{k-}}\ \right] 1_{\{T_k \leq T\}}$$

soit fini p.s., en posant pour alléger l'écriture

$$U_t^k = \exp\{\ \Delta M_{T_k}\, 1_{\{T_k \leq t \wedge T\}}\ \}\ ,$$

il vient

$$\alpha(M^{p,n})^T_t = \prod_{k=1}^{n} \frac{U^k_t}{E[U^k_t | \mathcal{F}_{T_{k-}}]} \prod_{k=1}^{n} (E[U^k_t | \mathcal{F}_{T_{k-}}] \exp(1 - E[U^k_t | \mathcal{F}_{T_{k-}}])) .$$

Le premier produit est une martingale (les espérances conditionnelles sont prises au sens généralisé) et le second est un processus décroissant positif en vertu de l'inégalité $x\, e^{1-x} \leqslant 1$; il en résulte que $\alpha(M^{p,n})^T$ est une surmartingale positive. Mais le temps d'arrêt

$$S^n = \inf \{ t : \sum_{k=1}^{n} E [\exp \Delta M_{T_k} | \mathcal{F}_{T_{k-}}] 1_{\{ T_k \leqslant t \}} = \infty \}$$

est prévisible, et si $(S^n_m, m > 1)$ est une suite annonçant S^n , il vient que $\alpha(M^{p,n})^{S^n_m}$ est une surmartingale positive.

Passons à M^q . Pour tout $t < \infty$, M^q_t est limite en probabilité de $M^{q,n}_t$ quand n tend vers l'infini, où

$$M^{q,n} = M^q - 1_{\{ |\Delta M| > n \}} \cdot M^q ,$$

où l'intégrale stochastique est optionnelle. Comme

$$\sum_{s \leqslant t} (e^{\Delta M^{q,n}_s} - 1 - \Delta M^{q,n}_s) 1_{\{\Delta M^{q,n}_s \neq 0\}} = \sum_{s \leqslant t} (e^{\Delta M^q_s} - 1 - \Delta M^q_s) 1_{\{0 < |\Delta M^q_s| \leqslant n\}}$$

est localement intégrable, d'après le lemme 2, $\alpha(M^{q,n})$ est une martingale locale.

Posons

$$Y^n = \alpha(M^{p,n} + M^{q,n}) = \alpha(M^{p,n})\, \alpha(M^{q,n}) .$$

Alors $(Y^n)^{S^n_m}$ est le produit de deux martingales locales positives et d'un processus décroissant, c'est donc une surmartingale. Si $s < t$,

$$Y^n_s 1_{\{s < S^n_m\}} \geqslant E [Y^n_t 1_{\{s < S^n_m\}} | \mathcal{F}_s]$$

$$\geqslant E [Y^n_t 1_{\{t < S^n_m\}} | \mathcal{F}_s] ,$$

et en passant à la limite en m ,

$$Y^n_s \geqslant E [Y^n_t | \mathcal{F}_s] .$$

Soit (n_j) une sous-suite telle que $Y^{n_j}_t \to \alpha(M)_t$ p.s. , $Y^{n_j}_s \to \alpha(M)_s$ p.s.

En appliquant le lemme de Fatou à

$$\frac{Y_t^{n_j}}{Y_s^{n_j}} 1_{\{ Y_s^{n_j} > 0 \}} ,$$

il vient finalement

$$\alpha(M)_s \geq E \left[\alpha(M)_t \,|\, \mathcal{F}_s \right] \blacksquare$$

Soit A le processus à valeurs dans $\overline{R_+}$ défini par

$$A_t = \int (e^x - 1 - x) \quad \nu_t(dx)$$

C'est la limite croissante des processus

$$A_t^n = \int (e^x - 1 - x) \; 1_{\{|x| \leq n\}} \; \nu_t(dx)$$

qui sont les compensateurs prévisibles des processus

$$B_t^n = \sum_{s \leq t} (e^{\Delta M_s} - 1 - \Delta M_s) \; 1_{\{ 0 < |\Delta M_s| \leq n \}} \; ;$$

ils sont donc finis, croissants, leur limite A est prévisible et le temps d'arrêt

$$S = \inf \{ t : \alpha(M)_t = 0 \} = \inf \{ t : A_t = + \infty \}$$

est prévisible. Si M est quasi-continue à gauche, les processus A^n sont continus, donc A est continu à gauche, et si

$$S_k = \inf \{ t : A_t > k \} ,$$

alors $A_{S_k} \leq k$, et A^{S_k} est le compensateur prévisible de B^{S_k}. Comme S_k tend en croissant vers S, cela montre que A^S est continu. Mais M n'a pas de saut à l'instant prévisible S, donc dans ce cas

$$\alpha(M)_S = \alpha(M)_{S-} \; .$$

Regardons plus précisément ce qui se passe avant S. Rappelons qu'un processus X est appelé une <u>martingale locale jusqu'à l'instant</u> U s'il existe une suite de temps d'arrêt (U_m) croissant vers U telle que pour tout m, X^{U_m} soit une martingale uniformément intégrable.

PROPOSITION 3. <u>Le processus</u> $\alpha(M)$ <u>est une martingale locale jusqu'à l'instant</u> S

<u>si et seulement si la martingale locale</u> M' <u>définie par</u>

$$M'_t = M_{t\wedge S} - \Delta M_S \, 1_{\{ S \leqslant t \}}$$

<u>est quasi-continue à gauche</u>. <u>Si</u> M^S <u>est quasi-continue à gauche</u>, <u>alors</u> $\alpha(M)^S$ <u>est une martingale locale</u> .

PREUVE. i/ Soit (S_m) une suite croissant vers S , avec $S_m < S$ sur $\{ S > 0 \}$, telle que $\alpha(M)^{S_m}$ soit uniformément intégrable. Si T est un temps d'arrêt prévisible, soit

$$M^m_t = M_t^{S_m} - \Delta M_T^{S_m} \, 1_{\{T \leqslant t\}} \, .$$

Remarquons que $\alpha(M^m)$ est une surmartingale positive et que

$$\alpha(M^m)_{T-} = \alpha(M^m)_T > 0 \quad \text{p.s.}$$

Il en résulte que $\alpha(M^m)_T$ est $\mathcal{F}_{T-}$ mesurable, et

$$1 = E\left[\alpha(M)_T^{S_m}\right]$$

$$= E\left[\alpha(M^m)_T \quad \exp\{\Delta M_T \, 1_{\{T \leqslant S_m\}} - E\left[e^{\Delta M_T} - 1 \,|\, \mathcal{F}_{T-}\right] 1_{\{T \leqslant S_m\}}\}\right]$$

$$= E\left[\alpha(M^m)_T \quad E\left[\exp(\Delta M_T \, 1_{\{T \leqslant S_m\}}) \,|\, \mathcal{F}_{T-}\right] \exp\{1 - E\left[\exp(\Delta M_T \, 1_{\{T \leqslant S_m\}}) \,|\, \mathcal{F}_{T-}\right]\}\right]$$

Comme l'inégalité $x \, e^{1-x} \leqslant 1$ est stricte pour $x \neq 1$, cela prouve que

$\Delta M_T \, 1_{\{T \leqslant S_m\}} = 0$ p.s. , donc $\Delta M'_T = 0$ p.s.

ii/ Si M' est quasi-continue à gauche, on peut trouver une suite (S_k) croissante vers S , avec $S_k < S$ sur $\{ S > 0 \}$, telle que

$$A_{S_k} = \int (e^x - 1 - x) \, \nu_{S_k}(dx) \leqslant k$$

Il résulte du lemme 2 que $\alpha(M)^{S_k} = \alpha(M')^{S_k}$ est une martingale locale.

iii/ Si M^S est quasi-continue à gauche, soit $(S_k^m, m \geqslant 1)$ une suite croissant vers l'infini telle que pour tout k , pour tout m , $\alpha(M)^{S_k \wedge S_k^m}$ soit

uniformément intégrable. La surmartingale positive $\alpha(M)^S$ admet une décomposition de Doob, elle est donc majorée par une martingale locale positive. Cela entraîne l'existence d'une suite (R_p) de temps d'arrêt croissant vers l'infini telle que pour tout p ,

$$E\left[\sup_{t \leq R_p \wedge S} \alpha(M)_t\right] < \infty$$

Si $s < t$ et $D \in \mathcal{F}_s$,

$$\int_D \alpha(M)_{t\wedge R_p \wedge S_k \wedge S_k^m} \, dP = \int_D \alpha(M)_{s\wedge R_p \wedge S_k \wedge S_k^m} \, dP .$$

Par convergence dominée, on passe à la limite en m , puis en k , et comme $\alpha(M)_S = \alpha(M)_{S-}$, nous vérifions que $\alpha(M)^S$ est une martingale locale∎

En fait, seule la conséquence suivante nous servira dans la dernière partie.

COROLLAIRE. <u>Supposons qu'il existe</u> $c > 0$ <u>tel que</u> $\Delta M \leq c$.
<u>Si</u> $\lambda > 0$ <u>et si</u>

$$\phi_c(\lambda) = \frac{e^{\lambda c} - 1 - \lambda c}{c^2} ,$$

<u>le processus</u>

$$\exp\{ \lambda M_t - \phi_c(\lambda) < M,M >_t \}$$

<u>est une surmartingale positive.</u>

PREUVE. On vérifie aisément que pour tout $\lambda > 0$,

$$\phi_c(\lambda) \geq \frac{\lambda^2}{2}$$

$e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \leq \phi_c(\lambda) \; x^2$ pour tout $x \leq c$.

D'après la proposition 2 , si $s < t$,

$$1 \geq E\left[\exp\{\lambda(M_t - M_s) - \frac{\lambda^2}{2}(<M^c,M^c>_t - <M^c,M^c>_s) - \int (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x)(\nu_t(dx) - \nu_s(dx))\} \mid \mathcal{F}_s\right]$$

donc

$$1 \geq E\left[\exp\{\lambda(M_t - M_s) - \frac{\lambda^2}{2}(<M^c,M^c>_t - <M^c,M^c>_s) - \phi_c(\lambda)\int x^2(\nu_t(dx) - \nu_s(dx))\} \mid \mathcal{F}_s\right]$$

$$\geq E\left[\exp\{ \lambda(M_t - M_s) - \phi_c(\lambda) \; (<M,M>_t - <M,M>_s) \} \mid \mathcal{F}_s\right] \blacksquare$$

4 - LA LOI DU LOGARITHME ITERE

Il est possible pour certaines martingales d'améliorer la connaissance que le théorème 1 nous donne de leur comportement asymptotique. Nous arrivons alors à la célèbre loi du logarithme itéré, établie par Stout [9] pour les martingales discrètes. Nous ne montrerons ci-dessous que le côté facile de cette loi, en introduisant une nouvelle condition sur les sauts qui élargit un peu son domaine de validité.

THEOREME 3. Si M est localement de carré intégrable et vérifie

$$E\left[\sup_t \Delta M_t\right] < \infty ,$$

alors

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{M_t}{h(A_t)} \leq 1 \quad \text{p.s. } \underline{\text{sur}} \ \{ A_\infty = \infty \} ,$$

où $A = \langle M,M \rangle$

$$h(u) = (2\, u \operatorname{Log} \operatorname{Log} u)^{1/2} \quad \underline{\text{pour}}\ u \geq e .$$

PREUVE. i/ Commençons par supposer $\Delta M \leq c$. D'après le corollaire et l'inégalité maximale des surmartingales, pour $\lambda > 0$ et $a > 0$,

$$P(\sup_t (\lambda M_t - \phi_c(\lambda)\, A_t) > \lambda\, a) \leq \exp(-\lambda a) .$$

Soient $\theta > 1$, $\delta > 0$

$$a_k = \frac{1+\delta}{2}\, h(\theta^k) \quad , \quad \lambda_k = \frac{h(\theta^k)}{\theta^k} ,$$

où k varie parmi les entiers tels que $\theta^k \geq e$. Si

$$T_k = \inf \{t : A_t \geq \theta^k \} ,$$

sur l'ensemble $\{ T_k \leq t < T_{k+1} \}$,

$$a_k + \frac{\phi_c(\lambda_k)}{\lambda_k}\, A_t \leq q_k + \frac{\phi_c(\lambda_k)}{\lambda_k}\, \theta^{k+1} = C_k(\theta,\delta)\, h(\theta^k) \leq C_k(\theta,\delta)\, h(A_t) ,$$

où

$$C_k(\theta,\delta) = \frac{1+\delta}{2} + \theta\, \frac{\phi_c(\lambda_k)}{\lambda_k^2} \to \frac{1+\delta+\theta}{2} \quad \text{lorsque } k \to \infty .$$

Des inégalités

$$P\left(\sup_t \left\{ M_t - \frac{\phi_c(\lambda_k)}{\lambda_k} A_t - a_k \right\} > 0 \right) \leqslant \left(\frac{1}{k \log \theta}\right)^{1+\delta}$$

nous tirons d'après le lemme de Borel-Cantelli que sur $\{ A_\infty = \infty \}$,

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{M_t}{h(A_t)} \leqslant \frac{1+\delta+\theta}{2} \quad \text{p.s.},$$

donc en fait, puisque δ et θ sont arbitraires

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{M_t}{h(A_t)} \leqslant 1 \quad \text{p.s.}$$

ii/ Supposons maintenant $E\left[\sup_t \Delta M_t\right] < \infty$ et posons

$$S_t = \sup_{s \leqslant t} \Delta M_t$$

$$K_t = \sum_{s \leqslant t} \Delta M_s \, 1_{\{ \Delta M_s \geqslant 2 S_{s-} \}} .$$

Comme dans la démonstration du théorème 2, $K_\infty \leqslant 2 S_\infty$. Si $\tilde{K}$ désigne le compensateur prévisible de K, la martingale $N = K - \tilde{K}$ est à variation intégrable, donc converge p.s. vers une limite finie, tandis que si $N' = M - N$, alors $|\Delta N'_t| \leqslant 4 S_{t-}$ (voir [6], p. 81). Si T est un temps de saut totalement inaccessible de M, $\Delta N_T \, \Delta N'_T = 0$, tandis que si T est un temps de saut prévisible tel que $E[\Delta M_T^2] < \infty$,

$$E[\Delta N_T \, \Delta N'_T \mid \mathcal{F}_{T-}] = E[(\Delta K_T - E[\Delta K_T \mid \mathcal{F}_{T-}])(\Delta M_T - \Delta K_T + E[\Delta K_T \mid \mathcal{F}_{T-}]) \mid \mathcal{F}_{T-}]$$

$$= (E[\Delta K_T \mid \mathcal{F}_{T-}])^2 \geqslant 0 \quad ;$$

le processus $< N,N' >$ est donc croissant, d'où $< M,M >_t \geqslant < N',N' >_t$ pour tout t. Posons encore

$$T_n = \inf\{ t : S_{t-} \geqslant n \} ;$$

nous obtenons

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{N'_t}{h(<N',N'>_t)} \leqslant 1 \quad \text{p.s. sur } \{ <N',N'>_\infty = \infty \} \cap \{ T_n = \infty \}$$

puis

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{M_t}{h(A_t)} \leqslant \overline{\lim} \frac{N'_t}{h(<N',N'>_t)} \leqslant 1 \quad \text{p.s. sur } \{ <N',N'>_\infty = \infty \} \cap \{ A_\infty = \infty \}$$

tandis que sur $\{ < N',N' >_\infty < \infty \}$, N'_t converge p.s. vers une limite finie, donc

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{M_t}{h(A_t)} = 0 \quad \text{p.s.} \quad \text{sur } \{ < N',N' >_\infty < \infty \} \cap \{ A_\infty = \infty \} \;\blacksquare$$

Il reste à établir qu'au moins lorsque $|\Delta M| \leqslant c$,

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{M_t}{h(A_t)} \geqslant 1 \quad \text{p.s.} \quad \text{sur } \{ A_\infty = \infty \} .$$

Vu l'extrême technicité de la démonstration de Stout [9] , reprise par Freedman [3] , nous nous contenterons d'affirmer que le passage du temps discret au temps continu s'effectue sans difficulté, et pour terminer nous donnerons, toujours grâce à la décomposition de Davis, une loi du logarithme itéré valable pour des martingales locales éventuellement non localement de carré intégrable.

THEOREME 4. <u>Si</u> $E [\sup_t |\Delta M_t|] < \infty$, <u>alors</u>

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{M_t}{h(B_t)} = 1 \quad \text{p.s.} \quad \underline{\text{sur}} \; \{ B_\infty = \infty \} ,$$

<u>où</u> $B = [M,M]$

$h(u) = (2u \text{ Log Log } u)^{1/2}$ <u>pour</u> $u \geqslant e$.

PREUVE. Le théorème 2 et ce qui précède nous permettent de conclure lorsque $|\Delta M|$ est borné dans L^∞ . Si $E [\sup_t |\Delta M_t|] < \infty$,
nous posons

$$S_t = \sup_{s \leqslant t} |\Delta M_s|$$

$$K_t = \sum_{s \leqslant t} \Delta M_s \; 1_{\{ |\Delta M_s| \geqslant 2S_{s-} \}} \;;$$

$\tilde{K}$ désigne encore le compensateur prévisible de K , N la martingale $K - \tilde{K}$, et $N' = M - N$. Comme $[N,N]_\infty < \infty$ p.s., les inégalités

$$([N',N']_\infty)^{1/2} - ([N,N]_\infty)^{1/2} \leqslant B_\infty^{1/2} \leqslant ([N',N']_\infty)^{1/2} + ([N,N]_\infty)^{1/2}$$

nous montrent que $\{ [N',N']_\infty = \infty \} = \{ B_\infty = \infty \}$ p.s. En posant à nouveau

$$T_n = \inf \{ t : S_{t-} \geqslant n \} ,$$

nous obtenons

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{M_t}{h(B_t)} = \overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{N'_t}{h([N',N']_t)} = 1 \quad \text{p.s.} \quad \text{sur} \quad \{ B_\infty = \infty \} \cap \{ T_n = \infty \} ,$$

donc sur tout l'ensemble $\{ B_\infty = \infty \}$ ∎

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. DAVIS. *On the integrability of the martingale square function.* Israël J.M. 8, 187-190 (1970).

[2] L.E. DUBINS et D.A. FREEDMAN. *A sharper form of the Borel-Cantelli lemma and the strong law.* Ann. M. Stat. 36, 800-807 (1965).

[3] D.A. FREEDMAN. *On tail probabilities for martingales.* Ann. Prob. 3, 100-118 (1975).

[4] R.K. GETOOR et M.J. SHARPE. *Conformal martingales.* Invent. Math. 16, 271-308 (1972).

[5] E. LENGLART. *Sur la convergence p.s. des martingales locales.* C.R. Acad. Sci. Paris, 284, 1085-1088 (1977).

[6] P.A. MEYER. *Martingales and stochastic integrals I.* Lecture Notes n° 284, Springer (1972).

[7] P.A. MEYER. *Un cours sur les intégrales stochastiques.* Séminaire de Probabilités X. Lecture Notes n° 511, Springer (1976).

[8] J. NEVEU. *Martingales à temps discret.* Masson (1972).

[9] W.F. STOUT. *A martingale analogue of Kolmogorov's law of the iterated logarithm.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 15, 279-290 (1970).

[10] M. YOR. *Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles.* Séminaire de Probabilités X. Lecture Notes n° 511. Springer (1976).