SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

C. MÉTRAUX

Quelques inégalités pour martingales à paramètre bidimensionnel

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 170-179
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__170_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

QUELQUES INEGALITES POUR MARTINGALES A PARAMETRE BIDIMENSIONNEL

par C. Métraux

Soient (Ω,F,P) un espace de probabilité et $\{F_{m,n}, m,n\geq o\}$ une famille croissante de sous-tribus de F telle que $F_{m,n}=\{\phi,\Omega\}$ si $m = o$ ou $n = o$. Nous désignerons, pour tout $m,n \geq o$, par $F_{m,\infty}$, respectivement $F_{\infty,n}$, les tribus $\bigvee_{n=o}^{\infty} F_{m,n}$ et $\bigvee_{m=o} F_{m,n}$.

Nous dirons qu'un processus $f = \{f_{m,n}, m,n\geq 1\}$ est une martingale si, pour tout $m,n \geq 1$, la variable aléatoire $f_{m,n}$ est $F_{m,n}$-mesurable et intégrable et si, pour tout $n \geq 1$ fixé, $\{f_{m,n}, m\geq 1\}$ est une martingale relative à la famille $\{F_{m,\infty}, m\geq 1\}$ et, pour tout $m \geq 1$ fixé, $\{f_{m,n}, n\geq 1\}$ est une martingale relative à la famille $\{F_{\infty,n}, n\geq 1\}$.

Dans le cas où la famille $\{F_{m,n}, m,n\geq o\}$ satisfait l'hypothèse d'indépendance conditionnelle (F4) de [4], notre notion de martingale coïncide avec la notion usuelle de martingale relative à la relation d'ordre: $(m,n) \leq (p,q)$ si $m \leq p$ et $n \leq q$.

Dans cet article, nous étendrons au cas des martingales ainsi définies quelques inégalités dues à D.L. Burkholder (cf. [1]).

Si f est une martingale, nous poserons, pour tout $m,n \geq 1$,

$$d_{m,n} = f_{m,n} - f_{m-1,n} - f_{m,n-1} + f_{m-1,n-1} ,$$

avec la convention que $f_{m,n} = o$ si $m = o$ ou $n = o$.

Nous poserons également, pour tout $m,n \geq 1$,

$$S_{m,n}(f) = \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} d_{k,\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Théorème 1. Soit f une martingale. Si $p > 1$, il existe deux constantes positives C_p et D_p ne dépendant pas de f telles que, pour tout $m,n \geq 1$,

$$(1) \qquad C_p \, E[S_{m,n}(f)^p] \leq E[|f_{m,n}|^p] \leq D_p \, E[S_{m,n}(f)^p]$$

Démonstration. Montrons d'abord que, pour tout $m,n \geq 1$,

$$(2) \qquad E[|g_{m,n}|^p] \leq C_p \, E[|f_{m,n}|^p] ,$$

où $g_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} u_k v_\ell \, d_{k,\ell}$, $u = \{u_k, k \geq 1\}$ et $v = \{v_\ell, \ell \geq 1\}$ étant deux suites bornées de nombres réels, et où C_p désigne une constante positive non nécessairement la même que celle de l'énoncé.

Nous commençons par remarquer que $\{g_{m,n}, m \geq 1\}$ est la transformée de Burkholder de la martingale ordinaire $\{h_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} v_\ell d_{k,\ell} , m \geq 1\}$ par la suite u est que $\{h_{m,n}, n \geq 1\}$ est la transformée de Burkholder de $\{f_{m,n}, n \geq 1\}$ par la suite v. D'où, en appliquant l'inégalité de D.L. Burkholder (cf. démonstration du théorème 9 de [1]) deux fois successivement, nous obtenons, pour tout $m,n \geq 1$,

$$E[|g_{m,n}|^p] \leq M_p \; E[|h_{m,n}|^p] \; ,$$

ainsi que

$$E[|h_{m,n}|^p] \leq M_p \; E[|f_{m,n}|^p] \; .$$

L'inégalité (2) s'ensuit.

A partir de cette inégalité, la suite de la démonstration est analogue à celle qu'a donnée D.L. Burkholder (cf. théorème 9 de [1]) et utilise les inégalités de Khintchine (cf.[6] p.257) suivantes: si $\{a_{k,\ell} \; , k,\ell \geq 1\}$ est une suite de nombres réels et si $r_k(s)$, $r_\ell(t)$, $k,\ell \geq 1$, sont les fonctions de Rademacher sur $[0,1]$, alors nous avons, pour tout $p \geq o$,

$$(3) \quad A_p\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k,\ell}^2\Big)^{p/2} \leq \int_o^1\int_o^1 \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k,\ell} r_k(s) r_\ell(t)\Big|^p \, dsdt$$

$$\leq B_p \; \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k,\ell}^2\Big)^{p/2} ,$$

où A_p et B_p sont deux constantes positives.

Soit f une martingale et $v = \{v_{m,n} \; , m,n \geq 1\}$ un processus tel que $v_{m,n}$ est $F_{m-1,n-1}$ -mesurable pour tout $m,n \geq 1$ et que $\sup_{m,n\geq 1} |v_{m,n}| \leq 1$. Nous appellerons transformée de Burkholder de f par v la martingale $g = \{g_{m,n} \; , m,n \geq 1\}$ définie, pour tout $m,n \geq 1$, par

$$g_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} v_{k,\ell} d_{k,\ell} \; .$$

Théorème 2. Soit f une martingale et g la transformée de Burkholder de f par v. Si $p > 1$, il existe une constante positive C_p ne dépendant pas de f telle que, pour tout $m,n \geq 1$,

$$(4) \qquad E[\sup_{m,n\geq 1} |g_{m,n}|^p] \leq C_p \sup_{m,n\geq 1} E[|f_{m,n}|^p] .$$

Démonstration. En appliquant l'inégalité de Doob (cf.[3]) à la martingale g, nous obtenons

$$E[\sup_{m,n\geq 1} |g_{m,n}|^p] \leq A_p \sup_{m,n\geq 1} E[|g_{m,n}|^p] ,$$

où A_p est une constante positive ne dépendant pas de g.

En remarquant que, suite à l'hypothèse $\sup_{m,n\geq 1} |v_{m,n}| \leq 1$, $S_{m,n}(g) \leq S_{m,n}(f)$ pour tout $m,n \geq 1$, nous obtenons, à l'aide des inégalités (1), pour tout $m,n \geq 1$,

$$E[|g_{m,n}|^p] \leq D_p\ E[S_{m,n}(g)^p] \leq D_p\ E[S_{m,n}(f)^p],$$

ainsi que

$$E[S_{m,n}(f)^p] \leq \frac{1}{C_p} E[|f_{m,n}|^p] .$$

L'inégalité (4) du théorème s'ensuit.

Théorème 3. Soit f une martingale. Il existe deux constantes positives C et D ne dépendant pas de f telles que, pour tout $m,n \geq 1$,

$$(5) \qquad E[S_{m,n}(f)] \leq C\ E[|f_{m,n}|\log_+^2|f_{m,n}|] + D$$

(6) $$E[|f_{m,n}|] \leq C\, E[S_{m,n}(f)\log_+^2 S_{m,n}(f)] + D$$

<u>Demonstration</u>. En utilisant les mêmes notations et la même technique que dans le début de la démonstration du théorème 1, nous obtenons, pout tout $m,n \geq 1$,

(7) $$E[|g_{m,n}|] \leq C\, E[|f_{m,n}|\log_+^2|f_{m,n}|] + D$$

où C et D désignent deux constantes non nécessairement les mêmes que celles de l'énoncé du théorème.

A partir de cette inégalité, la suite de la démonstration est analogue à celle qu'a donnée D.L. Burkholder (cf. théorème 10 de [1]). Elle utilise l'inégalité (3), avec $p = 1$, pour la démonstration de (5) et l'inégalité suivante pour la démonstration de (6): si $\{a_{k,\ell}\ ,\ k,\ell \geq 1\}$ est une suite de nombres réels et si $r_k(s)$, $r_\ell(t)$, $k,\ell \geq 1$, sont les fonctions de Rademacher sur $[0,1]$, alors nous avons, pour tout $m,n \geq 1$,

(8) $$\int_0^1\int_0^1 [|\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}r_k(s)r_\ell(t)|\log_+^2|\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}r_k(s)r_\ell(t)|]\, dsdt$$
$$\leq A(\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}^2)^{\frac{1}{2}} \log_+^2 (\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}^2)^{\frac{1}{2}} + A\ ,$$

où A est une constante positive.

Les inégalités (5) et (7) sont les meilleures possibles en ce sens que la puissance 2 du $\log_+$ ne peut être abaissée. Les contre-exemples suivants sont inspirés de l'article de D.L. Burkholder.

Sur l'ensemble des entiers positifs muni de la probabilité P définie par

$$P(k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad k \geq 1,$$

nous considérons la martingale $\{f_n, n \geq 1\}$ définie par

$$f_n(k) = \begin{cases} -1 & \text{si } k \leq n, \\ n & \text{si } k > n, \end{cases} \qquad k,n \geq 1.$$

Cette martingale est bornée dans L^1, car

$$\sup_{n\geq 1} E[|f_n|] \leq \sup_{n\geq 1} \frac{2n}{n+1} = 2,$$

mais elle n'est pas bornée dans $L \log_+ L$, car

$$\sup_{n\geq 1} E[|f_n| \log_+ |f_n|] = \sup_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1} \log n\right) = \infty .$$

Nous noterons $\{g_n, n \geq 1\}$ la transformée de Burkholder de $\{f_n, n\geq 1\}$ par la suite de constantes $\{v_n = (-1)^{n-1}, n \geq 1\}$.

Sur l'ensemble des couples d'entiers positifs muni de la probabilité P définie par

$$P(k,\ell) = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell+1}\right), \quad k,\ell \geq 1,$$

considérons maintenant la martingale $f = \{f_{m,n}, m,n \geq 1\}$ définie par

$$f_{m,n}(k,\ell) = f_m(k) f_n(\ell), \quad k,\ell,\ m,n \geq 1,$$

ainsi que la transformée $g = \{g_{m,n}, m,n \geq 1\}$ de f par $v = \{v_{m,n} = (-1)^{m-1}(-1)^{n-1}, m,n \geq 1\}$.

Nous avons, pour tout $k,\ell, m,n \geq 1$,

$$g_{m,n}(k,\ell) = g_m(k)g_n(\ell) .$$

Calculons successivement $E[|f_{m,n}|\log_+^p|f_{m,n}|]$ pour $p > 2$, $E[S_{m,n}(f)]$ et $E[|g_{m,n}|]$.

Nous avons tout d'abord

$$|f_m(k)f_n(\ell)|\log_+^p|f_m(k)f_n(\ell)| = \begin{cases} o & \text{si } k \leq m, \ell \leq n, \\ n\log_+^p n & \text{si } k \leq m, \ell > n, \\ m\log_+^p m & \text{si } k > m, \ell \leq n, \\ mn\log_+^p(mn) & \text{si } k > m, \ell > n, \end{cases}$$

et

$$E[|f_{m,n}|\log_+^p f_{m,n}|] = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty} |f_m(k)f_n(\ell)|\log_+^p|f_m(k)f_n(\ell)|\, P(k,\ell) .$$

La somme sur $k \leq m$ et $\ell \leq n$ nous donne o, celle sur $k \leq m$ et $\ell > n$

$$n\log_+^p n \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=n+1}^{\infty} P(k,\ell) = \frac{m}{m+1}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) n\log_+^p n ,$$

celle sur $k > m$ et $\ell \leq n$

$$m\log_+^p m \sum_{k=m+1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{n} P(k,\ell) = \left(1 - \frac{m}{m+1}\right)\frac{n}{n+1}\, m\log_+^p m ,$$

et enfin celle sur $k > m$ et $\ell > n$

$$mn \log_+^p(mn) \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{\ell=n+1}^{\infty} P(k,\ell) = (1 - \frac{m}{m+1})(1 - \frac{n}{n+1}) \; mn \log_+^p(mn) \; .$$

Nous en déduisons que

$$E[|f_{m,n}| \log_+^p |f_{m,n}|] = \frac{mn}{(m+1)(n+1)} [\log_+^p n + \log_+^p m + \log_+^p mn] \; .$$

Si $m = n$, le 2ème membre est majoré par $(2+2^p)\log^p n$.

Nous avons ensuite

$$E[S_{m,n}(f)] = \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\sqrt{k^2+k-1}}{k^2+k} + \frac{\sqrt{m}}{m+1}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{m} \frac{\sqrt{\ell^2+\ell-1}}{\ell^2+\ell} + \frac{\sqrt{n}}{n+1}\right) \; .$$

Le premier terme du produit est minoré par $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k+1}$; quant au second, il est minoré par $\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell+1}$.

Par conséquent, si $m = n$, $E[S_{m,n}(f)]$ est minoré par une quantité qui se comporte asymptotiquement comme $\log^2 n$.

Nous avons pour terminer

$$E[|g_{m,n}|] = E[|g_m|] \; E[|g_n|] \; ,$$

avec, lorsque n est pair, $n = 2q$,

$$E[|g_{2q}|] = \sum_{\ell=1}^{q} \frac{1}{2\ell(2\ell+1)} + \sum_{\ell=1}^{2q} \frac{1}{\ell+1}$$

et lorsque n est impair, $n = 2q + 1$,

$$E[|g_{2q+1}|] = \sum_{\ell=1}^{q} \frac{1}{2\ell(2\ell+1)} + \sum_{\ell=1}^{2q+1} \frac{1}{\ell+1} + \sum_{\ell=2q+2}^{\infty} \frac{1}{\ell(\ell+1)} \; .$$

Dans les deux cas nous remarquons que $E[|g_n|]$ est minoré par $\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell+1}$. Par conséquent, si m = n, $E[|g_{m,n}|]$ est minoré par une quantité qui se comporte asymptotiquement comme $\log^2 n$. En conclusion, les inégalités (5) et (7) sont en défaut lorsque $p < 2$ et $m = n$ assez grand car les membres de gauche se comportent comme $\log^2 n$ alors que les membres de droite se comportent comme $\log^p n$.

Remarquons pour terminer que le procédé d'itération utilisé dans les démonstrations qui précèdent permet d'obtenir d'autres inégalités, par exemple la suivante, due à D.L. Burkholder, B.J. Davis et R.F. Gundy [2]. La formulation que nous en donnerons est celle qui figure dans le livre de A.M. Garsia [5]. L'hypothèse (F4) est supposée satisfaite.

<u>Théorème 4</u>. Soit $\{a_{m,n}, m,n\geq 1\}$ une suite de variables aléatoires positives et $\Phi(u)$ une fonction convexe sur $[0,\infty[$ telle que

$$p = \sup_{u>0} \frac{u\Phi'(u)}{\Phi(u)} < \infty .$$

Nous avons alors

$$(9)\quad E[\Phi(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} E[a_{k,\ell}|F_{k-1,\ell-1}])] \leq p^{2(p+1)} E[\Phi(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k,\ell})].$$

Si f est une martingale en posant

$$S(f) = (\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} d_{k,\ell}^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \sigma(f) = (\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} E[d_{k,\ell}^2|F_{k-1,\ell-1}])^{\frac{1}{2}}$$

et en remplaçant, dans le théorème 4, $a_{k,\ell}$ par $d_{k,\ell}^2$, ainsi que p par p/2, il résulte que

$$(10) \qquad E[\Phi(\sigma(f))] \leq (\frac{p}{2})^{p+2} E[\Phi(S(f))] .$$

Un cas particulier important est celui où $\Phi(u) = u^p$ pour $p \geq 2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.L. Burkholder: Martingale transforms, Ann. Math. Stat.37, 1966, p.1494 - 1504.

[2] D.L. Burkholder, B.J. Davis, R.F. Gundy: Integral inequalities for convex functions of operators on martingales, Proc. of 6th Berkeley Symposium.

[3] R. Cairoli: Une inégalité pour martingale à indices multiples et ses applications, Sém. de Prob. IV, Univ. de Strasbourg, Springer, Berlin 1970, p.1 - 27.

[4] R. Cairoli, J.B. Walsh: Stochastic integrals in the plane, Acta Mathematica 134, 1975, p.111 - 183.

[5] A.M. Garsia: Martingale inequalities, Seminar notes on recent progress, W.A. Benjamin, 1973.

[6] R. Paley: A remarquable serie of orthogonal functions I, Proc. London Math. Soc. 34, 1931, p.241 - 264.

Département de Mathématiques
Ecole Polytechnique Fédérale
Avenue de Cour 61
1007 Lausanne, Suisse

Adresse actuelle:
Ecole d'Ingénieurs
de l'Etat de Vaud
Route de Cheseaux 1
1401 Yverdon, Suisse