

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN MÉMIN

Décompositions multiplicatives de semimartingales exponentielles et applications

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 35-46

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__35_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DECOMPOSITIONS MULTIPLICATIVES
DE SEMIMARTINGALES EXPONENTIELLES ET APPLICATIONS

Jean MEMIN

Etant donné deux semimartingales X et Y , Yor a montré la formule:

$$(1): \quad \mathcal{E}(X) \mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X+Y + [X, Y])$$

où $\mathcal{E}(X)$ désigne la semimartingale exponentielle définie par G. Doléans [2].

Nous considérons le problème réciproque suivant: étant donné deux semimartingales S^1 et S^2 , trouver les semimartingales X telles que:

$$(2): \quad \mathcal{E}(X) \mathcal{E}(S^1) = \mathcal{E}(S^2).$$

Nous montrons facilement (prop: I-1) que ce problème a une solution lorsque $\Delta S_t^1 \neq -1$ pour tout $t < \infty$, et cette solution est unique.

La factorisation (2) permet de résoudre des problèmes de décomposition multiplicative intéressants; c'est l'objet des paragraphes II et III, le paragraphe I étant consacré aux notations et rappels, et à l'établissement de (2).

Dans le paragraphe II nous retrouvons dans le cadre particulier des semimartingales exponentielles les résultats de Yoeurp [9], Meyer et Yoeurp [5], Yoeurp et Yor [10], de décomposition multiplicative canonique des surmartingales positives, des sous-martingales positives, enfin des semimartingales positives. De plus ce cadre nous permet d'obtenir des résultats supplémentaires; ainsi un corollaire immédiat de la proposition I-1 (Remarque II-2) fournit une décomposition multiplicative canonique pour $\mathcal{E}(X)$ dès que X est une sousmartingale quelconque, ($\mathcal{E}(X)$ n'est pas alors nécessairement positive), ou encore la proposition II-5 donne un résultat de décomposition pour $\mathcal{E}(X)$ lorsque $\mathcal{E}(X) \geq 0$ et non supposée strictement positive comme dans [10].

Dans le paragraphe III en appliquant (2) une nouvelle fois, on montre que pour toute martingale locale M on a la décomposition:

$$(3) \quad \mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(\tilde{M}^1) \mathcal{E}(M^2)$$

où $\mathcal{E}(M^2)$ est une martingale locale positive, localement de carré intégrable et $\mathcal{E}(\tilde{M}^1)$ est une martingale locale; ce résultat a des rapports avec le théorème de Girsanov et permet d'obtenir un critère d'uniforme intégrabilité de $\mathcal{E}(M)$ (non supposée positive) complétant le théorème II-2 de [5] et généralisant la proposition 5-2 de [4].

I- PRELIMINAIRES ET PROPOSITION FONDAMENTALE

Les notations et définitions que nous utilisons ici sont en général celles du cours sur l'intégrale stochastique de Meyer [6]. Tous les processus utilisés sont définis sur une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ et à valeurs réelles; la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ possède les propriétés habituelles: la famille (\mathcal{F}_t) est continue à droite et chaque \mathcal{F}_t contient les ensembles de P -mesure nulle de \mathcal{F} .

On note \underline{M} l'ensemble des martingales continues à droite, uniformément intégrables, \underline{M}_{loc} l'ensemble des martingales locales, $\underline{M}_{loc}(P)$ quand on voudra préciser la probabilité de référence; \underline{V} est l'ensemble des processus continus à droite, adaptés, nuls à l'origine, à variation finie sur tout compact.

Une semimartingale est un processus X pouvant être représenté sous la forme:

$$(1-1) \quad X = X_0 + M + A \quad \text{où } M \in \underline{M}_{loc}, M_0 = 0, A \in \underline{V}$$

Une semimartingale est spéciale s'il existe une décomposition (1-1) de X pour laquelle le processus A est prévisible; une telle décomposition est alors unique et constitue la décomposition canonique de X . Si X est une semimartingale spéciale $X - X_0$ est localement intégrable.

obtenir
 En général on peut plusieurs décompositions (1-1) pour une semimartingale quelconque, mais la partie continue de la martingale M entrant dans une telle décomposition est, elle, unique. On note X^c cette martingale locale continue.

Soit $M \in \underline{M}_{loc}$ et localement de carré intégrable, on note $\langle M, M \rangle$ le processus croissant prévisible (nul en 0) associé à M^2 (c'est à dire tel que $M^2 - \langle M, M \rangle \in \underline{M}_{loc}$)

Soit X une semimartingale, on note $[X, X]$ le processus élément de \underline{V} défini par:

$$[X, X]_t = \langle X^c, X^c \rangle_t + \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^2$$

Si $M \in \underline{M}_{loc}$ et localement de carré intégrable, $\langle M, M \rangle$ est le compensateur prévisible de $[M, M]$.

X étant c.a.d.l.a.g, X_- est le processus défini par:

$$(X_-)_t = X_{t-} = \lim_{s \uparrow t} X_s, \quad X_0 = 0.$$

X_∞ désigne $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t$ lorsque cette limite existe.

Etant donné X une semimartingale, H un processus prévisible localement borné, on peut définir l'intégrale stochastique de H par rapport à X ; nous noterons $H \cdot X$ le processus obtenu :

$$H \cdot X_t = \int_{]0, t]} H_s dX_s.$$

Si T est un temps d'arrêt, X^T désigne la semimartingale arrêtée en T ($X_t^T = X_{t \wedge T}$ pour $t < \infty$).

On note $\mathcal{E}(X)$ la semimartingale solution de l'équation:

$$Z = 1 + Z_- \cdot X$$

Cette solution est unique et donnée explicitement ([2], [6] p.304) par la formule :

$$(1-2) \quad \mathcal{E}(X)_t = \exp(X_t - \frac{1}{2} \langle X^c, X^c \rangle_t) \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta X_s) \exp(-\Delta X_s)$$

pour $t < \infty$; ΔX_s représentant le saut de X en s .

Soit X et Y des semimartingales, l'expression donnant $\mathcal{E}(X)$ et $\mathcal{E}(Y)$ permet d'obtenir facilement l'égalité (voir: [11]):

$$(1-3) \quad \mathcal{E}(X) \mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X+Y + [X, Y]).$$

Nous pouvons maintenant donner la proposition fondamentale.

I-1 PROPOSITION

Etant donné S^1 et S^2 deux semimartingales nulles en 0 telles que, pour tout t fini $\Delta S_t^1 \neq -1$, il existe une semimartin-

gale X nulle en 0 et une seule telle que:

$$(1-4) \quad \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(S^1) = \mathbb{E}(S^2).$$

X est défini par l'égalité:

$$(1-5) \quad X_t = (S^2 - S^1)_t - \langle (S^2 - S^1)^c, (S^1)^c \rangle_t - \sum_{0 < u \leq t} \frac{\Delta(S^2 - S^1)_u \Delta S_u^1}{1 + \Delta S_u^1}$$

Démonstration:

Si X est solution de l'équation (1-4) on a:

$$X + [S^1, X] = S^2 - S^1;$$

ceci implique l'unicité d'un tel X : en effet si X^1 et X^2 sont deux solutions

$$X^1 - X^2 + [S^1, X^1 - X^2] = 0$$

on en déduit $(X^1)^c = (X^2)^c$; d'où:

$$[S^1, X^1 - X^2]_t = \sum_{0 < u \leq t} \Delta S_u^1 \Delta(X^1 - X^2)_u$$

$X^1 - X^2$ est alors un processus purement discontinu; l'hypothèse $\Delta S_u^1 \neq -1$ P.p.s montre que $X_u^1 = X_u^2$ pour tout u fini.

Pour l'existence de X on considère (1-5); montrons que

$$\sum_{0 < u \leq t} \frac{\Delta(S^2 - S^1)_u \Delta S_u^1}{1 + \Delta S_u^1} \in \underline{\mathbb{V}}$$

En effet, $\Delta S_u^1 \neq -1$ et il y a un nombre fini de sauts de S^1 pour lesquels $\Delta S_u^1 \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$ pour $u \in]0, t]$, et donc

$$\sum_{0 < u \leq t} \left| \frac{\Delta(S^2 - S^1)_u \Delta S_u^1}{1 + \Delta S_u^1} \right| 1_{\left\{ \Delta S_u^1 \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[\right\}} < \infty \text{ pour } t \text{ fini;}$$

$$\begin{aligned} \text{enfin } \sum_{0 < u \leq t} \left| \frac{\Delta(S^2 - S^1)_u \Delta S_u^1}{1 + \Delta S_u^1} \right| 1_{\left\{ \Delta S_u^1 \notin]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[\right\}} \\ \leq 2 \sum_{0 < u \leq t} \left| \Delta(S^2 - S^1)_u \Delta S_u^1 \right| \leq 2 [S^2 - S^1, S^1]_t \end{aligned}$$

La relation (1-5) définit donc une semimartingale X ; il est immédiat de vérifier alors, à partir du second membre de (1-5), que l'on a $X + [S^1, X] = S^2 - S^1$, ce qui donne le résultat.

II- DECOMPOSITIONS MULTIPLICATIVES DE SEMIMARTINGALES.

X étant une semimartingale spéciale, T désignant le temps d'arrêt $T = \inf \{ t: \mathcal{E}(X)_t = 0 \}$ nous considérons dans ce paragraphe le problème de la décomposition multiplicative canonique de la semimartingale $\mathcal{E}(X)$, c'est à dire de la factorisation :

$$(2-1) \quad \mathcal{E}(X) = Z V$$

où V est élément de \underline{V} et prévisible, où Z est une martingale locale sur l'intervalle $[0, T[$ (ce qui désignera ici la propriété suivante: il existe une suite (T_n) , avec $T_n \nearrow T$ P.ps et telle que $Z^{T_n} \in \underline{M}_{loc}$)

On a aussi $T = \inf \{ t: \mathcal{E}(X)_{t-} = 0 \}$. Il est facile alors de démontrer qu'une telle décomposition, si elle existe est unique sur l'intervalle $[0, T[$ (voir par ex: [3]).

Comme dans la proposition I-1, nous supposons que les semimartingales S, dont nous utilisons les exponentielles $\mathcal{E}(S)$ sont nulles en 0 ; ceci ne restreint d'ailleurs pas la généralité des résultats.

II-1 LEMME ([5] Prop II-1)

Soit S une semimartingale spéciale nulle en 0, de décomposition canonique $S = M+A$, telle que pour tout u fini on ait $\Delta A_u \neq -1$; on a alors la décomposition multiplicative canonique:

$$(2-2) \quad \mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(\tilde{M})\mathcal{E}(A) \\ \text{où } \tilde{M} = \frac{1}{1 + \Delta A} \cdot M$$

Démonstration.

La relation (2-2) est obtenue en appliquant la proposition I-1 à $S^2 = S$ et $S^1 = A$; il suffit alors pour avoir le résultat annoncé de vérifier que $\frac{1}{1 + \Delta A} \cdot M$ est défini et égal à

$$M - \sum_{0 < u_s} \frac{\Delta M_u \Delta A_u}{1 + \Delta A_u}$$

Or le processus $(\frac{1}{1 + \Delta A_u})_{u \in \mathbb{R}^+}$ est localement borné (voir par exemple [6] p.314), le processus $V = (\frac{\Delta A_u}{1 + \Delta A_u})_{u \in \mathbb{R}^+}$ aussi;

on peut donc définir $\frac{1}{1+\Delta A} \cdot M$. Maintenant $\sum_{0 < u \leq \cdot} \frac{\Delta M_u \Delta A_u}{1+\Delta A_u}$
 $= [M, V]$; comme V est prévisible et appartient à \underline{V} , $[M, \bar{V}] \in \underline{M}_{loc}$
 $[V]$; il est alors immédiat de vérifier que $\frac{1}{1+\Delta A} \cdot M$ et
 $M - \sum_{0 < u \leq \cdot} \frac{\Delta M_u \Delta A_u}{1+\Delta A_u}$ sont deux martingales locales ayant mêmes sauts
 et même partie continue.

II-2 REMARQUE

Lorsque X est une sousmartingale de décomposition de Doob-Meyer $X = M+A$, on a $\Delta A_u \geq 0$ pour tout u fini, le lemme précédent peut donc s'appliquer, on a ainsi la décomposition multiplicative canonique de $\mathcal{E}(X)$ alors que $\mathcal{E}(X)$ n'est pas nécessairement positive.

La décomposition obtenue en II-1 et la remarque II-2 sont appliquées dans [5] pour obtenir le théorème suivant que nous utiliserons au paragraphe III.

II-3 THEOREME ([5] théorème II-2)

Soit $M \in \underline{M}_{loc}$

a) Si M est de carré intégrable et si $\langle M, M \rangle$ est borné, alors $\mathcal{E}(M)$ est de carré intégrable. De plus si $\Delta M_s > -1$ pour s fini on a $\mathcal{E}(M)_\infty > 0$ P.ps.

b) Si M est à variation intégrable et si le compensateur prévisible de $\sum_s |\Delta M_s|$ est borné, alors $\mathcal{E}(M)$ est à variation intégrable.

On considère maintenant une semimartingale spéciale X (nulle en 0) telle que $\Delta X_s \geq -1$ pour tout s fini, et on définit les temps d'arrêt :

$$U = \inf \{ t : \Delta X_t = -1 \}$$

$$T' = \inf \{ t : \Delta A_t = -1 \}$$

II-4 LEMME

Les temps d'arrêt U , T' définis ci-dessus possèdent les propriétés suivantes :

- $U = T = \inf \{ t : \mathcal{E}(X)_t = 0 \} = \inf \{ t : \mathcal{E}(X)_{t-} = 0 \}$
- T' est prévisible et on a $T' \geq T$ P.ps.
- Il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt avec $T_n \nearrow T$ P.ps et telle que pour tout $t \leq T_n$, $\Delta A_t > -1$.

Démonstration.

Il est clair que $T \leq U$; pour avoir $U \leq T$ il suffit de remarquer que pour P-presque tout ω , pour tout $t < U(\omega)$ on a :

$$\exp(X_t - \frac{1}{2} \langle X^c, X^c \rangle_t) \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X_s) \exp(-\Delta X_s) > 0.$$

(En effet pour P-presque tout ω , pour tout t fini, il y a un nombre fini de sauts de X tels que $|\Delta X_s| > \frac{1}{2}$ avec $0 < s \leq t$; ainsi

$$\prod_{s \leq t < U(\omega)} (1 + \Delta X_s) \exp(-\Delta X_s) 1_{\{|\Delta X_s| > \frac{1}{2}\}} > 0$$

D'un autre coté on a les inégalités :

$$\prod_{s \leq t < U(\omega)} (1 + \Delta X_s) \exp(-\Delta X_s) 1_{\{|\Delta X_s| \leq \frac{1}{2}\}} \geq \exp \left[\sum_{s \leq t < U(\omega)} 2(\Delta X_s)^2 1_{\{|\Delta X_s| \leq \frac{1}{2}\}} \right] > 0$$

b) T' est prévisible comme début de l'ensemble $\{(t, \omega) : \Delta A_t(\omega) = -1\}$ qui est prévisible et a ses coupes fermées (voir [1]).

Si R est un temps prévisible on a sur l'ensemble $\{R < \infty\}$

$$E[\Delta X_R | \mathcal{F}_{R-}] = \Delta A_R \quad \text{par conséquent:}$$

$$\int_{\{T' < \infty\}} (\Delta X_{T'} + 1) dP = \int_{\{T' < \infty\}} (\Delta A_{T'} + 1) dP = 0$$

donc $\Delta X_{T'} = -1$ sur l'ensemble $\{T' < \infty\}$, d'où $T \leq T'$ P.ps.

c) On considère (S_n) une suite de temps d'arrêt annonçant T' , et on pose $T_n = S_n \wedge T$, (T_n) a alors les propriétés indiquées.

II-5 PROPOSITION.

Soit X une semimartingale spéciale de décomposition

$X = M + A$ ($X_0 = 0$ et $\Delta X_s \geq -1$ pour s fini).

Alors $\mathcal{E}(X)$ admet la décomposition multiplicative canonique

$$(2-3) \quad \mathcal{E}(X) = Z \mathcal{E}(A)$$

où Z est une martingale locale sur $[0, T[$; (précisément si (T_n) est la suite de temps d'arrêt définie au II-4 c) on a

$$Z^{T_n} = \left(\frac{1}{1 + \Delta A} \right)^{T_n} \cdot M \quad \text{et} \quad Z_t = 0 \quad \text{si} \quad t \geq T.$$

Démonstration.

D'après les propriétés de la suite (T_n) , on obtient pour chaque n la décomposition :

$$\mathcal{E}(X)^{T_n} = \mathcal{E} \left(\left(\frac{1}{1 + \Delta A} \right)^{T_n} \cdot M \right) \mathcal{E}(A)^{T_n}$$

d'où le résultat, puisque $T_n \nearrow T$ P.ps et que pour $t \geq T$ $\mathcal{E}(X)_t = 0$.

II-6 REMARQUE

Lorsque l'on a $T' > T$ P.ps sur l'ensemble $\{T' < \infty\}$, le processus Z intervenant dans la relation (2-3) est une martingale locale sur $[0, T]$, autrement dit $Z^T \in \underline{M}_{loc}$. C'est notamment le cas lorsque l'on considère la surmartingale positive $\mathcal{E}^\lambda(M)$ où $0 < \lambda < 1$ et $M \in \underline{M}_{loc}$ avec $\Delta M_s \geq -1$ pour s fini; on peut montrer (voir [5]) que $\mathcal{E}^\lambda(M) = \mathcal{E}(X)$ où X est une surmartingale de décomposition canonique $X = N + A$; alors $T = \inf \{t: \Delta X_t = -1\} = \inf \{t: \Delta M_t = -1\}$. Mais $0 = E[\Delta M_{T'} 1_{\{T' < \infty\}}] = E[\Delta M_{T'} 1_{\{T = T' < \infty\}}] + E[\Delta M_{T'} 1_{\{T < T' < \infty\}}]$. La dernière espérance est nulle car $1_{\{T < T' < \infty\}}$ est $\mathcal{F}_{T'}^{\perp}$ -mesurable, on en déduit que $P[\{T' = T\} \cap \{T' < \infty\}] = 0$ et donc $T' > T$ P.ps sur $\{T' < \infty\}$.

II-7 REMARQUE

Le résultat de la proposition II-5 contient ceux de Yoeurp et Yor [10] pour les semimartingales et de Meyer et Yoeurp [8] pour les sousmartingales, puisque n'importe quelle semimartingale Y telle que $Y > 0$ et $Y_- > 0$ P.ps peut s'écrire $Y = Y_0 \mathcal{E}(X)$; cependant on ne peut déduire de II-5 le résultat de Yoeurp [9] sur les surmartingales positives.

II-8 REMARQUE

La projection prévisible des semimartingales (décomposables multiplicativement) jouant un rôle essentiel dans les résultats d'existence des décompositions de [9], [8], [10], [3], on peut trouver surprenant de ne pas la voir apparaître ici; en fait (en notant ${}^P\mathcal{E}(X)$ la projection prévisible de $\mathcal{E}(X)$) on a la relation:

$${}^P\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X)_-(1 + \Delta A) \quad \text{où } X = M + A.$$

Comme $T = \inf \{t: \Delta X_t = -1\} = \inf \{t: \mathcal{E}(X)_t = 0\}$ on a:

$$\inf \{t: {}^P\mathcal{E}(X)_t = 0\} = T \wedge T' = T \quad \text{si } \Delta X_s \geq -1 \quad (s < \infty).$$

S'il n'y a pas d'hypothèse sur l'amplitude des sauts de X on voit qu'on n'obtiendra de décomposition multiplicative avec notre méthode que sur l'intervalle $[0, T' \wedge T]$, c'est à dire sur le plus grand intervalle stochastique sur lequel ${}^P\mathcal{E}(X)$ est localement borné, ce qui est en accord avec les études générales faites [3].

III- DECOMPOSITIONS MULTIPLICATIVES

DE MARTINGALES LOCALES

On considère $M \in \underline{M}_{loc}$. Soit M^1 la martingale locale compensée du processus localement intégrable $\sum_u \Delta M_u 1_{\{|\Delta M_u| \geq \frac{1}{2}\}}$ et $M^2 = M - M^1$; M^1 est alors une martingale locale à variation localement intégrable, M^2 est une martingale locale, localement de carré intégrable avec $|\Delta M_u^2| < 1$ pour tout u fini; (une adaptation immédiate de la démonstration de [7] montre ce résultat).

III-1 PROPOSITION

Soit $M \in \underline{M}_{loc}$ et $M = M^1 + M^2$ la décomposition de M définie ci-dessus ($M_0 = 0$).

a) $\mathcal{E}(M)$ admet la décomposition :

$$(3-1) \quad \mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(M^2) \mathcal{E}(\tilde{M}^1) \quad \text{où}$$

$$(3-2) \quad \tilde{M}_t^1 = M_t^1 - \sum_{0 < u \leq t} \frac{\Delta M_u^1 \Delta M_u^2}{1 + \Delta M_u^2} \quad t < \infty .$$

b) $\mathcal{E}(M^2) \tilde{M}^1 \in \underline{M}_{loc}$

c) Si $\Delta M_u > -1$ alors $\Delta \tilde{M}_u^1 > -1$ pour tout u fini.

Démonstration.

Le a) est simplement la proposition I-1 appliquée à $S^2 = M$ et $S^1 = M^2$.

Pour le b) appliquons la formule d'intégration par parties:

$$\mathcal{E}(M^2) \tilde{M}^1 = \mathcal{E}(M^2) \cdot M^1 - \sum_{0 < u \leq \cdot} \mathcal{E}(M^2)_u \frac{\Delta M_u^1 \Delta M_u^2}{1 + \Delta M_u^2} + \tilde{M}_\cdot^1 \cdot \mathcal{E}(M^2) + [\mathcal{E}(M^2), \tilde{M}^1] .$$

$$\text{Mais } [\mathcal{E}(M^2), \tilde{M}^1] = \sum_{0 < u \leq \cdot} \mathcal{E}(M^2)_u \frac{\Delta M_u^1 \Delta M_u^2}{1 + \Delta M_u^2}$$

et on obtient:

$$\mathcal{E}(M^2) \tilde{M}^1 = \mathcal{E}(M^2) \cdot M^1 + \tilde{M}_\cdot^1 \cdot \mathcal{E}(M^2)$$

d'où le résultat.

Le c) est immédiat en remarquant que $\mathcal{E}(M)_t$ et $\mathcal{E}(M^2)_t$ strictement positifs impliquent $\mathcal{E}(\tilde{M}^1)_t > 0$ et $\Delta\tilde{M}_t^1 > -1$.

Le corollaire suivant donne une précision intéressante sur le théorème de Girsanov (version [6] p.377).

III-2 COROLLAIRE

Soit $M \in \underline{M}_{loc}$ avec $\Delta M_s > -1$ pour tout s fini, et tel que $\mathcal{E}(M)_\infty$ soit uniformément intégrable. Soit P' la probabilité définie par $\frac{dP'}{dP} = \mathcal{E}(M)_\infty$.

Soit M^1 une martingale locale à variation localement intégrable et notons \tilde{M}^1 la P -semimartingale définie par:

$$\tilde{M}^1 = M^1 - \sum_{0 < u \leq \cdot} \frac{\Delta M_u^1 \Delta M_u}{1 + \Delta M_u}$$

alors, \tilde{M}^1 est une P' -martingale locale, à variation localement intégrable; de plus le P' -compensateur prévisible de $\sum_{0 < u \leq \cdot} |\Delta \tilde{M}_u^1|$ est égal au P -compensateur de $\sum_{0 < u \leq \cdot} |\Delta M_u^1|$.

Démonstration

En procédant comme dans la proposition III-1, il est clair que $\mathcal{E}(M)\tilde{M}^1 \in \underline{M}_{loc}(P)$ donc $\tilde{M}^1 \in \underline{M}_{loc}(P')$; il reste à montrer la dernière assertion. Soit Y un processus prévisible positif tel que $E_{P'} \left[\int_0^\infty Y_s dA_s \right] < \infty$, où A désigne le P -compensateur prévisible de $\sum_{0 < u \leq \cdot} |\Delta M_u^1|$, et où $E_{P'}$ désigne l'espérance relative à P' .

$$\begin{aligned} E_{P'} \left[\int_0^\infty Y_s dA_s \right] &= E \left[\int_0^\infty \mathcal{E}(M)_\infty Y_s dA_s \right] = E \left[\int_0^\infty Y_s \mathcal{E}(M)_{s-} dA_s \right] \\ &= E \left[\int_0^\infty Y_s \mathcal{E}(M)_{s-} d \left(\sum_{0 < u \leq \cdot} |\Delta M_u^1| \right)_s \right] = E \left[\sum_s \mathcal{E}(M)_{s-} Y_s |\Delta \tilde{M}_s^1| (1 + \Delta M_s) \right] \\ &= E \left[\sum_s \mathcal{E}(M)_s Y_s |\Delta \tilde{M}_s^1| \right] = E \left[\mathcal{E}(M)_\infty \left(\sum_s Y_s |\Delta \tilde{M}_s^1| \right) \right] \\ &= E_{P'} \left[\sum_s Y_s |\Delta \tilde{M}_s^1| \right]. \end{aligned}$$

Ceci montre en particulier que \tilde{M}^1 est à variation P' -localement intégrable puisque $\int_0^\cdot \mathcal{E}(M)_{s-} dA_s$ est P -localement intégrable.

III-3 THEOREME

Soit $M \in \underline{M}_{loc}$ et telle que le compensateur prévisible du pro-

cessus : $\langle M^c, M^c \rangle + \sum_{0 < u \leq \cdot} |\Delta M_u^1| + \sum_{0 < u \leq \cdot} (\Delta M_u^2)^2$

soit borné (M^1 et M^2 constituant la décomposition additive de M avec M^1 compensée du processus $\sum_{0 < u \leq \cdot} \Delta M_u 1_{\{|\Delta M_u| \geq \frac{1}{2}\}}$) alors $\mathcal{E}(M)$ est uniformément intégrable.

Démonstration.

L'hypothèse faite implique que $\langle M^2, M^2 \rangle$ est borné; d'après le théorème II-3 a) on en déduit que $\mathcal{E}(M^2)$ est de carré intégrable ; on peut donc définir une probabilité P' par: $\frac{dP'}{dP} = \mathcal{E}(M^2)_\infty$; de plus comme $\mathcal{E}(M^2)_\infty > 0$ P.ps, P' est équivalente à P .

En appliquant le corollaire III-2

$\tilde{M}^1 = M^1 - \sum_{0 < u \leq \cdot} \frac{\Delta M_u^1 \Delta M_u^2}{1 + \Delta M_u^2}$ est une P' -martingale locale à va-

riation localement intégrable. Comme le P -compensateur prévisible de $\sum_{0 < u \leq \cdot} |\Delta M_u^1|$ est borné, il en est de même pour le P' -compensateur prévisible de $\sum_{0 < u \leq \cdot} |\Delta \tilde{M}_u^1|$, et $\mathcal{E}(\tilde{M}^1)$ est P' -uniformément

intégrable d'après II-3 a). $\mathcal{E}(\tilde{M}^1)_\infty$ est alors défini et fini P' . ps donc P.ps ; on peut définir $\mathcal{E}(M)_\infty = \mathcal{E}(M^2)_\infty \mathcal{E}(\tilde{M}^1)_\infty$. $|\mathcal{E}(M)_\infty|$ est P -intégrable puisque $E [|\mathcal{E}(M)_\infty|] = E_{P'} [|\mathcal{E}(\tilde{M}^1)_\infty|]$

$$\text{Maintenant } E_{P'} [\mathcal{E}(\tilde{M}^1)_\infty | \mathcal{F}_t] = \frac{E [\mathcal{E}(M^2)_\infty \mathcal{E}(\tilde{M}^1)_\infty | \mathcal{F}_t]}{E [\mathcal{E}(M^2)_\infty | \mathcal{F}_t]}$$

et donc $\mathcal{E}(M)_t = \mathcal{E}(\tilde{M}^1)_t \mathcal{E}(M^2)_t = E [\mathcal{E}(M)_\infty | \mathcal{F}_t]$
d'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C.DELLAACHERIE : Capacités et processus stochastiques
Springer-verlag (1972)
- [2] C.DOLEANS-DADE : Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semimartingales.
Z.Wahr.. 16 181-214 (1970)
- [3] J.JACOD : Projection prévisible et décomposition multiplicative d'une semimartingale positive; à paraître aux Sem. Proba.XII
Lectures notes in Maths. Springer-Verlag.
- [4] J.JACOD J.MEMIN : Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semimartingales.
Z.Wahr.. 55 1-37 (1976)
- [5] D.LEPINGLE J.MEMIN: Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles
à paraître aux Z.Wahr..
- [6] P.A.MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques.Sem.Proba.X
Lectures notes in Maths. 511 Springer-Verlag
- [7] P.A.MEYER : Notes sur les intégrales stochastiques II-Le théorème fondamental sur les martingales locales. Sem.Proba. XI
Lectures notes in Maths. 581 Springer-Verlag
- [8] P.A.MEYER C.YOEURP :Sur la décomposition multiplicative des sousmartingales positives. Sem.Proba. X
Lectures notes in Maths. 511 Springer-Verlag
- [9] C.YOEURP :Décompositions de martingales locales et formules exponentielles. Sem.Proba. X
Lectures notes in Maths.511 Springer-Verlag
- [10] C.YOEURP M.YOR : Espace orthogonal à une semimartingale et applications . à paraître aux Z.Wahr..
- [11] M.YOR : Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles. Sem.Proba. X
Lectures notes in Maths. 511 Springer-Verlag