SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN BROSSARD

Comportement non-tangentiel et comportement brownien des fonctions harmoniques dans un demi-espace. Démonstration probabiliste d'un théorème de Calderon et Stein

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 378-397

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__378_0>

COMPORTEMENT "NON-TANGENTIEL" ET COMPORTEMENT "BROWNIEN" DES FONCTIONS HARMONIQUES DANS UN DEMI-ESPACE. DEMONSTRATION PROBABILISTE D'UN THEOREME DE CALDERON ET STEIN.

par Jean BROSSARD

En 1950 Calderon ([1] et [2]) et en 1961 Stein ([1]) démontraient que pour une fonction u harmonique dans un demi-espace $\Pi = \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}_+^*$, les trois conditions suivantes étaient équivalentes en presque tout point ϑ de la frontière :

- u admet une limite "non-tangentielle" en ϑ
- u est bornée "non-tangentiellement" au voisinage de ϑ
- le gradient de u, ∇u, est de carré intégrable "non-tangentiellement" au voisinage de ϑ, pour la mesure $y^{1-\nu} dx\,dy$ (où dx désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^\nu$ et dy celle de $\mathbb{R}_+^*$.

Mon but est ici, de montrer ce théorème par des méthodes probabilistes. Pour cela, je vais m'appuyer sur le résultat suivant : si X_t désigne la position de la particule brownienne à l'instant t, les propriétés suivantes sont presque sûrement équivalentes :

- $u(X_t)$ admet une limite quand t tend vers τ (temps de sortie de Π)
- $u(X_t)$ est bornée sur $[0,\tau[$
- $\int_0^\tau \|\nabla u(X_t)\|^2 dt$ est fini.

Dans le cas $\nu = 1$, c'est-à-dire dans le cas du demi-plan, il est connu (Brelot et Doob [1], Doob [1]) que l'existence d'une limite non-tangentielle pour u équivaut presque partout à l'existence d'une limite sur les trajectoires browniennes. Cependant, ce résultat n'est plus valable dès que la dimension de l'espace est supérieure à 2 $(\nu > 1)$, comme l'a montré un contre-exemple de Burkholder et Gundy ([1]) : on peut trouver dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$ une fonction harmonique ayant presque-sûrement des limites sur les trajectoires browniennes, mais n'ayant nulle part de limite non-tangentielle. Malgré cela, je vais montrer que le théorème de Calderson et Stein sur le "comportement non-tangentiel de u (th. I) peut se déduire du théorème analogue sur le "comportement brownien" de u (th. I*).

1. LE THEOREME DE CALDERON ET STEIN ET SON ANALOGUE PROBABILISTE.

Introduisons tout d'abord quelques notations. Quand on notera un point de $\Pi = \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}_+^*$ sous la forme (x,y) , x représentera la coordonnée dans $\mathbb{R}^\nu$ et y la coordonnée dans $\mathbb{R}_+^*$. Si ϑ est un point de $\mathbb{R}^\nu$ (identifié à la frontière de Π), et a un nombre strictement positif, on notera $\Gamma_a(\vartheta)$ le cône tronqué défini par :

$$\Gamma_a(\vartheta) = \{(x,y) \in \Pi \mid \|x-\vartheta\| < ay < a\} .$$

A la fonction u , on peut associer les deux fonctions de $\mathbb{R}^\nu$ définies par :

$$N_a(\vartheta) = \sup_{z \in \Gamma_a(\vartheta)} |u(z)|$$

$$A_a(\vartheta) = \left[\int_{\Gamma_a(\vartheta)} \|\nabla u(x,y)\|^2 y^{1-\nu} dx\, dy\right]^{1/2} .$$

On appelle $\mathcal{L}a$ l'ensemble des points ϑ de $\mathbb{R}^\nu$ pour lesquels $u(z)$ admet une limite quand z tend vers ϑ dans $\Gamma_a(\vartheta)$. On appelle $\mathcal{N}_a$ (resp. $\mathcal{C}_a$) l'ensemble des points où N_a (resp. A_a) est finie. Avec ces notations, le théorème de Calderon et Stein s'énonce :

THEOREME I. - Les ensembles $\mathcal{L}_a$, $\mathcal{N}_a$, $\mathcal{A}_a$ ne diffèrent que par des ensembles de mesure de Lebesgue nulle et sont indépendants de a (à des ensembles de mesure nulle près).

Introduisons maintenant des notations analogues à celles d'analyse pour énoncer le théorème probabiliste analogue au théorème de Calderon et Stein.

Si X_t est la position de la particule brownienne à un instant t strictement inférieur à τ (temps de sortie de Π), on peut considérer les deux variables aléatoires

$$N^* = \sup_{t\in[0,\tau[} u(X_t)$$

et

$$A^* = \int_0^\tau \|\nabla u(X_t)\|^2 dt \ .$$

Il est connu que $[u(X_t)]_{t<\tau}$ est un mouvement brownien stoppé à l'instant A^* et changé de temps. Les trois événements

$$\mathcal{L}^{**} = \{ u(X_t) \text{ admet une limite finie quand } t \text{ tend vers } \tau \} ,$$

$$\mathcal{N}^{**} = \{ N^* < \infty \} ,$$

$$\mathcal{A}^{**} = \{ A^* < \infty \}$$

ne diffèrent donc que par des événements P^z-négligeables (où P^z désigne la loi de probabilité du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^{\nu+1}$ issu d'un point z de Π). [Ce résultat est aussi montré dans Brossard [1]].

C'est en fait la "forme conditionnée" de ce résultat que je vais utiliser (théorème I^*). Pour cela, considérons ${}^{\vartheta}P^z$, probabilité du mouvement brownien issu de z et conditionné par sa sortie de Π en ϑ. Autrement dit, considérons le h-processus tel qu'il est défini par Doob dans [1], h étant la fonction minimale associée au point ϑ, c'est-à-dire :

$$p_\vartheta(x,y) = c_\nu \frac{y}{(\|x-\vartheta\|^2+y^2)^{\frac{\nu+1}{2}}} \quad \text{avec} \quad c_\nu = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\pi^{\frac{\nu+1}{2}}} \ .$$

Identifions les événements "naturels" du h-processus aux événements "naturels" du mouvement brownien tué à l'instant τ . Les propriétés suivantes découlent alors de l'article de Doob [1] :

i) si A est un événement "naturel", $\vartheta \mapsto {}^{\vartheta}P^{z}(A)$ est une fonction borélienne dont la composée avec X_τ est égale à $E^{z}[A|X_\tau]$.

ii) Si σ est un temps d'arrêt pour la famille naturelle de tribus rendue continue à droite, et si A est dans la tribu du passé de σ , alors :

$$ {}^{\vartheta}E^{z}[A\ ;\ \sigma<\tau] = \frac{1}{p_\vartheta(z)} E^{z}[A\ ;\ p_\vartheta(X_\sigma)\ ;\ \sigma<\tau] \ . $$

iii) Les fonctions $\vartheta \mapsto {}^{\vartheta}P^{z}(\mathcal{L}^{**})$, $\vartheta \mapsto {}^{\vartheta}P^{z}(\mathcal{N}^{**})$, $\vartheta \mapsto {}^{\vartheta}P^{z}(\mathcal{A}^{**})$ prennent pour valeur 0 ou 1 , indépendamment de z et sont donc les fonctions caractéristiques de trois boréliens $\mathcal{L}^{*}$, $\mathcal{N}^{*}$, $\mathcal{A}^{*}$ de $\mathbf{R}^{\nu}$. Si de plus ϑ est dans $\mathcal{L}^{*}$, la variable aléatoire $\lim_{t\to\tau} u(X_t)$ est ${}^{\vartheta}P^{z}$-presque sûrement constante.

Ces propriétés et les remarques faites plus haut nous permettent d'énoncer le théorème I^{*} :

THEOREME I^{*}. - Les ensembles $\mathcal{L}^{*}$, $\mathcal{N}^{*}$, $\mathcal{A}^{*}$ ne diffèrent que par des ensembles de mesure de Lebesgue nulle.

2. DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE DU THEOREME I (COMPARAISON DES ENSEMBLES $\mathcal{L}_a$ et $\mathcal{N}_a$).

Dans ce paragraphe, je vais montrer que $\mathcal{L}_a$ et $\mathcal{N}_a$ ne diffèrent que par un ensemble de mesure nulle et sont indépendants de a , à des ensembles de mesure nulle près.

Appelons $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{N}$) l'intersection des $\mathcal{L}_a$ (resp. $\mathcal{N}_a$) quand a parcourt $\mathbb{R}_+^*$. Les inclusions de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}_a$ et de $\mathcal{L}_a$ dans $\mathcal{N}_a$ étant évidentes, il ne reste plus qu'à montrer "l'inclusion" de $\mathcal{N}_a$ dans $\mathcal{L}$. (On écrira désormais "inclusion" (ou "égalité") entre guillemets à la place de : inclusion (ou égalité) à un ensemble de mesure nulle près).

Soit $E_n = \{\vartheta \in \mathbb{R}^\nu \mid N_a(\vartheta) \le n\}$. Comme $\mathcal{N}_a$ est la réunion des E_n, il suffit de montrer "l'inclusion" de E_n dans $\mathcal{L}$. Je vais d'abord montrer (sans faire appel à la théorie du potentiel) que E_n est inclus dans $\mathcal{N}^*$. Comme N^* est majoré par n pour les trajectoires qui restent dans $\Omega_{E_n} = \bigcup_{\vartheta \in E_n} \Gamma_a(\vartheta)$, et comme ${}^\vartheta P^z[N^* < \infty]$ vaut 0 ou 1 (propriété i), § 1), c'est une conséquence immédiate de la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> E <u>un borélien de</u> $\mathbb{R}^\nu$, $\Omega_E = \bigcup_{\vartheta \in E} \Gamma_a(\vartheta)$ <u>et</u> σ <u>le temps de sortie de</u> Ω_E.

<u>Pour presque tout point</u> ϑ <u>de</u> E <u>et tout</u> z <u>dans</u> $\Gamma_a(\vartheta)$, ${}^\vartheta P^z[\sigma = \tau]$ <u>est strictement positif.</u>

Cette proposition sera démontrée au paragraphe 4. Achevons de montrer "l'inclusion" de E_n dans $\mathcal{L}$. Presque tout point ϑ de E_n est dans $\mathcal{N}^*$ d'après ce qu'on vient de voir, donc dans $\mathcal{L}^*$ d'après le théorème I*. Et donc quand t tend vers τ, $u(X_t)$ admet une limite ${}^\vartheta P^z$-presque-sûrement constante de valeur notée $u(\vartheta)$. La proposition 1 implique : $|u(\vartheta)| \le n$.

Soit v la fonction harmonique bornée dans Π définie par :

$$v(z) = E^z[u(X_\tau) ; X_\tau \in E_n] .$$

Je vais montrer que pour presque tout ϑ de E_n, pour tout nombre b strictement positif, $u(z) - v(z)$ tend vers 0 quand z tend vers ϑ dans $\Gamma_b(\vartheta)$. Ceci montrera que pour presque tout ϑ de E_n et tout $b > 0$, $u(z)$ admet une limite finie quand z tend vers ϑ dans $\Gamma_b(\vartheta)$, puisque tel est le cas de $v(z)$. Ceci achèvera donc de montrer "l'inclusion" de E_n dans $\mathcal{L}$.

Soit σ le temps de sortie de Ω_{E_n} . Comme E_n est fermé, si $\sigma = \tau$, X_σ est dans E_n et donc :

$$u(z) - v(z) = E^z[u(X_\sigma) - v(X_\sigma)] = E^z[u(X_\sigma) - v(X_\sigma) ; \sigma \neq \tau]$$

puisque u et v ont même valeur sur E_n . Et donc si z est dans Ω_{E_n} :

$$|u(z) - v(z)| \leq 2n\, P^z[\sigma \neq \tau] \quad .$$

Il suffit maintenant de montrer que $P^z[\sigma \neq \tau]$ tend vers 0 quand z tend vers ϑ dans $\Gamma_b(\vartheta)$ (cela montrera en effet, que si z est suffisamment proche de ϑ dans $\Gamma_b(\vartheta)$, il est dans Ω_{E_n} et donc que la majoration de $|u(z) - v(z)|$ est valable). Reprenons ici une idée de Calderon : posons

$$\Lambda_1 = \{(x,y) \in \Pi - \Omega_{E_n} \mid y < 1\} \quad \text{et} \quad \Lambda_2 = \{(x,y) \in \Pi - \Omega_{E_n} \mid y \geq 1\} \ .$$

Alors :

$$P^z[\sigma \neq \tau] = P^z[X_\sigma \in \Lambda_1] + P^z[X_\sigma \in \Lambda_2] \quad .$$

Le deuxième terme tend vers 0 , car il est majoré par la P^z-probabilité que la particule sorte de la bande $\{(x,y) \in \Pi \mid 0 < y < 1\}$ par l'hyperplan $y = 1$ et que cette probabilité est égale à l'ordonnée de z . Pour majorer le premier terme, utilisons le fait que si $z' = (x',y')$ est un point de Π , et $B_{z'}$ la boule de $\mathbb{R}^\nu$ de centre x' et de rayon ay' , alors $P^{z'}[X_\tau \in B_{z'}]$ est une constante C indépendante de z' . Si de plus z' est dans Λ_1 , $B_{z'}$ est incluse dans E_n^c et donc $P^{z'}[X_\tau \notin E_n] \geq C$. La propriété de Markov forte, permet d'écrire :

$$\begin{aligned} P^z[X_\tau \notin E_n] &\geq P^z\left[X_\sigma \in \Lambda_1 \ ; P^{X_\sigma}[X_\tau \notin E_n]\right] \\ &\geq C . P^z[X_\sigma \in \Lambda_1] \quad . \end{aligned}$$

Pour presque tout ϑ de E_n et tout $b > 0$, le membre de gauche tend vers 0 quand z tend vers ϑ dans $\Gamma_b(\vartheta)$. Il en est donc de même de $P^z[X_\sigma \in \Lambda_1]$, ce qui achève la démonstration.

En conclusion, nous avons montré dans ce paragraphe (en admettant provisoirement la proposition 1) que les ensembles $\mathcal{L}_a$, $\mathcal{N}_a$, $\mathcal{L}$ étaient "égaux". Ceci montre bien la partie (due à Calderon) du théorème I relative aux ensembles $\mathcal{L}_a$ et $\mathcal{N}_a$.

3. DEMONSTRATION DE LA DEUXIEME PARTIE DU THEOREME I ("EGALITE" DE $\mathcal{N}_a$ ET $\mathcal{A}_a$).

Pour achever la démonstration du théorème I, il ne reste plus qu'à montrer que $\mathcal{A}_a$ et $\mathcal{N}_a$ ne diffèrent que par un ensemble de mesure nulle. Comme on a vu que $\mathcal{N}_a$ ne dépendait pas de a , à un ensemble de mesure nulle près (§ 2), il suffit de montrer les "inclusions" de $\mathcal{A}_a$ dans $\mathcal{N}_{\frac{a}{2}}$ et de $\mathcal{N}_{2a}$ dans $\mathcal{A}_a$ (propositions 2 et 3).

PROPOSITION 2. - <u>A un ensemble de mesure nulle près,</u> $\mathcal{A}_a$ <u>est inclus dans</u> $\mathcal{N}_{\frac{a}{2}}$.

Pour démontrer cette proposition, nous allons d'abord montrer "l'inclusion" de $\mathcal{A}_a$ dans $\mathcal{A}^*$. Cela s'appuie sur le lemme simple suivant :

LEMME 1. - <u>Soit</u> E <u>un borélien de</u> $\mathbb{R}^\nu$ <u>et</u> $\Omega_E = \bigcup_{\vartheta\in E} \Gamma_a(\vartheta)$. <u>Alors</u> :

$$\int_E A_a^2(\vartheta)d\vartheta = k_\nu a^\nu \int_{\Omega_E} y\varphi_E(x,y)\|\nabla u(x,y)\|^2 dx\,dy$$

<u>où</u> $\varphi_E(x,y)$ <u>désigne la moyenne de la fonction caractéristique de</u> E <u>sur la boule</u> $B_{x,ay}$ <u>de centre</u> x <u>et de rayon</u> ay , <u>et</u> k_ν <u>le volume de la boule unité de</u> $\mathbb{R}^\nu$.

Je ne démontrerai pas ce lemme qui est une simple application du théorème de Fubini (cf. Stein [1]).

Considérons maintenant $E_p = \{\vartheta \in \mathbb{R}^\nu \mid \|\vartheta\| \le p \ ; \ A_a^2(\vartheta) \le p\}$ et $E_{p,n} = \left\{\vartheta \in E_p \mid \forall y \le \frac{1}{n} \ , \ \varphi_{E_p}(x,y) \ge \frac{1}{2}\right\}$ (où φ_{E_p} est la fonction définie dans le lemme 1). Presque tout point ϑ de E_p est point de densité de E_p , c'est-à-dire que $\varphi_{E_p}(\vartheta, y)$ tend vers 1 quand y tend vers 0 . $E_p - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{p,n}$ est donc un ensemble de mesure nulle. Il suffit donc de montrer que pour tout couple (p,n) , $E_{p,n}$ est "inclus" dans $\mathcal{Q}^*$. Remarquons que $E_{p,n}$ est compact. Notons $\Omega_{E_p} = \bigcup_{\vartheta \in E_p} \Gamma_a(\vartheta)$ et définissons $\Omega_{E_{p,n}}$ de façon identique. Soit σ le temps de sortie de $\Omega_{E_{p,n}}$.

■ Majorons $E^{z_o}[A^*_\sigma]$ pour $z_o = (x_o, y_o)$ fixé dans Π (on pose $A^*_\sigma = \int_0^\sigma \|\nabla u(X_t)\|^2 dt$) :

$$E^{z_o}[A^*_\sigma] = E^{z_o}\left[\int_0^\sigma \|\nabla u(X_t)\|^2 dt\right] \le E^{z_o}\left[\int_0^\tau \|\nabla u(X_s)\|^2 \chi_{\Omega_{E_{p,n}}}(X_s) ds\right] .$$

Cette dernière quantité est (à une constante multiplicative près) la valeur en z_o du potentiel de Green de la fonction $\|\nabla u\|^2 \chi_{\Omega_{E_{p,n}}}$, c'est-à-dire :

$$\int_{\Omega_{E_{p,n}}} h_{z_o}(x,y) \|\nabla u(x,y)\|^2 dx\, dy$$

où $h_z(z')$ désigne la fonction de Green de Π . (cf. par exemple Dynkin [1] vol. II).

Cette intégrale se décompose en la somme de l'intégrale sur $\Lambda = \left\{(x,y) \in \Omega_{E_{p,n}} \mid y \le \min(\frac{1}{n}, \frac{y_o}{2})\right\}$ et de l'intégrale sur $\Omega_{E_{p,n}} - \Lambda$. Cette dernière est finie car $\Omega_{E_{p,n}} - \Lambda$ est relativement compact et la fonction à intégrer localement intégrable. D'autre part, comme :

$$h_{z_o}(z) = \begin{cases} \log \frac{r_2}{r_1} & \text{si } \nu = 1 \\ \frac{1}{r_1^{\nu-1}} - \frac{1}{r_2^{\nu-1}} & \text{si } \nu > 1 \end{cases}$$

(où r_1 et r_2 désignent les distances de z à z_o et au symétrique de z_o par rapport à la frontière de Π), il est facile de voir que sur Λ , $h_{z_o}(x,y)$ est majoré par une fonction du type ky . Et donc à une constante multiplicative près, $\int_\Lambda h_{z_o}(x,y)\|\nabla u(x,y)\|^2 dx\, dy$ est majoré par :

$$\int_{\Lambda} y\|\nabla u(x,y)\|^2 dx\, dy$$

et donc par :

$$2\int_{\Omega_{E_p}} y\varphi_{E_p}(x,y)\|\nabla u(x,y)\|^2 dx\, dy$$

puisque sur Λ, $\varphi_{E_p}(x,y) \geq \frac{1}{2}$ et que Λ est inclus dans Ω_{E_p}. Cette dernière intégrale est finie d'après le lemme 1 et la définition de E_p. Ceci achève de montrer que $E^{z_o}[A^*_\sigma]$ est fini pour tout z_o de Π.

■ De ce qui précède, on peut déduire que A^*_σ est fini P^z-presque sûrement pour tout z de Π, et donc en "conditionnant" ce résultat, que pour presque tout ϑ de $E_{p,n}$, pour tout z à coordonnées rationnelles, A^*_σ est fini ${}^\vartheta P^z$-presque sûrement. En utilisant la proposition 1, et le fait que ${}^\vartheta P^z[A^*_\tau < \infty]$ vaut 0 ou 1 indépendamment de z, on en déduit que presque tout point de $E_{p,n}$ est dans $\mathcal{a}^*$. Ceci achève donc de montrer "l'inclusion" de $\mathcal{a}_a$ dans $\mathcal{a}^*$.

Avant de terminer la démonstration de la proposition 2, montrons le lemme suivant (dû à Stein).

LEMME 2. - <u>Soit</u> $\Gamma'_{\frac{a}{2}}(\vartheta) = \{(x,y) \in \Pi \mid \|x-\vartheta\| < \frac{a}{2} y < \frac{a}{4}\}$. <u>Il existe une constante</u> C <u>telle que pour tout</u> ϑ :

$$\sup_{(x,y)\in\Gamma'_{\frac{a}{2}}(\vartheta)} y\|\nabla u(x,y)\| \leq C A_a(\vartheta) .$$

<u>Démonstration</u> : soit (x,y) un point de $\Gamma'_{\frac{a}{2}}(\vartheta)$ et B la boule de centre (x,y) tangente à la frontière de $\Gamma_a(\vartheta)$. Si (x',y') est dans B, et si r est le rayon de B, y', y et r sont des grandeurs comparables (leurs rapports deux à deux sont majorés par une constante ne dépendant que de a). Cette remarque jointe à la sous-harmonicité de $\|\nabla u\|^2$ conduit à :

$$y^2\|\nabla u(x,y)\|^2 \le y^2 \frac{1}{|B|}\int_B \|\nabla u(x',y')\|^2 dx'dy'$$

$$\le C\int_B y'^{1-\nu}\|\nabla u(x',y')\|^2 dx'dy'$$

$$\le C A_a^2(\vartheta)$$

ce qui est le résultat cherché.

Démonstration de la proposition 2 :

Comme $\mathcal{a}_a$ est "inclus" dans $\mathcal{a}^*$ (et donc dans η^* , d'après le théorème I*), il suffit de montrer que tout point ϑ de $\mathcal{a}_a \cap \eta^*$ est dans $\eta_{\frac{a}{2}}$. Soit donc ϑ un tel point et z_o le point $(\vartheta,1)$. Soit, pour y strictement inférieur à $\frac{1}{2}$, S_y l'ensemble des points de $\Gamma'_{\frac{a}{2}}(\vartheta)$ d'ordonnée y . D'après le lemme 2, pour tout couple (z_1,z_2) de points de S_y :

$$|u(z_1)-u(z_2)| \le \operatorname{diam}(S_y)\cdot \sup_{z\in S_y}\|\nabla u(z)\|$$

$$\le C\frac{a}{2}y\cdot\frac{A_a(\vartheta)}{y} = C'\frac{a}{2}A_a(\vartheta) .$$

Mais d'autre part, si τ_y désigne le temps de sortie de $\Pi_y = \{(x',y')\in\Pi \mid y'>y\}$, on a :

$${}^{\vartheta}P^{z_o}\left[X_{\tau_y}\in S_y\right] = \frac{1}{p_\vartheta(z_o)}E^{z_o}\left[p_\vartheta\left(X_{\tau_y}\right);\ X_{\tau_y}\in S_y\right]$$

$$= \frac{1}{p_\vartheta(z_o)}\int_{B_{\vartheta,\frac{ay}{2}}} p_\vartheta(x',y)\ \frac{C_\nu(1-y)}{[(1-y)^2+\|x'-\vartheta\|^2]^{\frac{\nu+1}{2}}}dx'$$

où $B_{\vartheta,\frac{ay}{2}}$ désigne la boule de $\mathbb{R}^\nu$ de centre ϑ et de rayon $\frac{ay}{2}$.

En tenant compte du fait que y est dans $]0,\frac{1}{2}]$, et que $z_o = (\vartheta,1)$:

$$
{}^{\vartheta}P^{z_0}\left[X_{\tau_y} \in S_y\right] \geq \frac{1}{2}\int_{B_{\vartheta,\frac{ay}{2}}} p_{\vartheta}(x',y)\frac{dx'}{\left[1+\frac{a^2y^2}{4}\right]^{\frac{\nu+1}{2}}}
$$

$$
\geq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\frac{a^2}{16}}\right]^{\frac{\nu+1}{2}} \int_{B_{\vartheta,\frac{ay}{2}}} p_{\vartheta}(x',y)dx' \ .
$$

Cette dernière intégrale vaut $\int_{B_{0,\frac{a}{2}}} p_0(x',1)dx'$ et ne dépend donc que de a . ${}^{\vartheta}P^{z_0}\left[X_{\tau_y} \in S_y\right]$ est donc minorée indépendamment de y par une constante $C(a)$ strictement positive.

Comme ϑ est dans $\mathcal{N}^*$, on peut trouver un nombre M tel que : ${}^{\vartheta}P^{z_0}[u^*_{\tau} \geq M] \leq \frac{C(a)}{2}$

et donc tel que pour tout $y \leq \frac{1}{2}$:

$$
{}^{\vartheta}P^{z_0}\left[\left|u\left(X_{\tau_y}\right)\right| < M \text{ et } X_{\tau_y} \in S_y\right] \geq \frac{C(a)}{2} \ .
$$

Pour tout $y < \frac{1}{2}$, on peut donc trouver un point z_1 dans S_y tel que $|u(z_1)| < M$. Et donc puisque sur S_y l'oscillation de u est majorée par $C\frac{a}{2}A_a(\vartheta)$, pour tout z de $\Gamma'_{\frac{a}{2}}(\vartheta)$ on a :

$$
|u(z)| \leq M + \frac{a}{2}CA_a(\vartheta) \ .
$$

Ceci montre que ϑ est dans $\mathcal{N}_{\frac{a}{2}}$.

PROPOSITION 3. - <u>A un ensemble de mesure nulle près,</u> $\mathcal{N}_{2a}$ <u>est inclus dans</u> $\mathcal{A}_a$.

<u>Démonstration</u> : soit $E_n = \{\vartheta | N_{2a}(\vartheta) \leq n\}$ et $\Omega_{E_n} = \bigcup_{\vartheta \in E_n} \Gamma_{2a}(\vartheta)$. Notons σ le temps de sortie de Ω_{E_n} . Comme nous l'avons déjà remarqué dans le paragraphe 1, $u(X_\sigma)$ a un sens (presque-sûrement). De plus, on doit avoir pour tout z de Ω_{E_n} :

$$u^2(z) = E^z[u^2(X_\sigma) - A^*_\sigma] \quad .$$

D'où :

$$E^z[A^*_\sigma] \leq E^z[u^2(X_\sigma)] \leq n^2 \quad .$$

On en déduit que pour presque tout ϑ , ${}^\vartheta E^z[A^*_\sigma]$ est fini pour tout z à coordonnées rationnelles.

Mais d'autre part, d'après le théorème de Fubini et la définition de ${}^\vartheta P^z$, comme σ est inférieur ou égal à z :

$$\begin{aligned} {}^\vartheta E^z[A^*_\sigma] &= \int_0^{+\infty} {}^\vartheta E^z[\|\nabla u(X_s)\|^2 \; ; \; s<\sigma]\, ds \\ &= \int_0^{+\infty} {}^\vartheta E^z[\|\nabla u(X_s)\|^2 \; ; \; s<\tau \; ; \; s<\sigma]\, ds \\ &= \frac{1}{p_\vartheta(z)} \int_0^{+\infty} E^z[\|\nabla u(X_s)\|^2 p_\vartheta(X_s) \; ; \; s<\sigma]\, ds \\ &= \frac{1}{p_\vartheta(z)} E^z[\int_0^\sigma p_\vartheta(X_s)\|\nabla u(X_s)\|^2 ds] \\ &= \frac{k_\nu}{p_\vartheta(z)} \int_{\Omega_{E_n}} g_z(x,y) p_\vartheta(x,y)\|\nabla u(x,y)\|^2 dxdy \end{aligned}$$

où $g_z(z')$ désigne la fonction de Green de Ω_{E_n} [cf. par exemple Dynkin [1] vol. II].

Et donc, pour presque tout ϑ de E et tout z à coordonnées rationnelles, dans Ω_{E_n} :

$$\int_{\Gamma_a(\vartheta)} g_z(x,y) p_\vartheta(x,y)\|\nabla u(x,y)\|^2 dxdy < +\infty \quad .$$

Mais si (x,y) est dans $\Gamma_a(\vartheta)$:

$$p_\vartheta(x,y) = \frac{C_\nu y}{[y^2+\|x-\vartheta\|^2]^{\frac{\nu+1}{2}}} \geq \frac{C_\nu}{(1+a^2)^{\frac{\nu+1}{2}}} \frac{1}{y^\nu} \quad .$$

Et donc,

$$\int_{\Gamma_a(\vartheta)} \frac{g_z(x,y)}{y} y^{1-\nu} \|\nabla u(x,y)\|^2 dxdy < +\infty \quad .$$

Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que pour presque tout ϑ, pour tout z dans $\Gamma_a(\vartheta)$, $\dfrac{g_z(x,y)}{y}$ admet une limite strictement positive quand (x,y) tend vers $(\vartheta,0)$ dans $\Gamma_a(\vartheta)$. C'est l'objet de la proposition suivante :

PROPOSITION 4. - <u>Soit</u> E <u>un fermé de</u> $\mathbb{R}^\nu$ <u>et</u> $\Omega_E = \bigcup_{\vartheta\in E} \Gamma_{2a}(\vartheta)$. <u>Si</u> $g_z(z')$ <u>désigne la fonction de Green de</u> Ω_E, <u>pour presque tout</u> ϑ <u>de</u> E, <u>pour tout</u> z_o <u>dans</u> $\Gamma_a(\vartheta)$, $\dfrac{g_{z_o}(x,y)}{y}$ <u>admet une limite strictement positive quand</u> (x,y) <u>tend vers</u> $(\vartheta,0)$ <u>dans</u> $\Gamma_a(\vartheta)$.

Cette proposition est une conséquence de la proposition 1 et elle sera démontrée dans le paragraphe suivant.

4. DEMONSTRATION DES PROPOSITIONS 1 ET 4.

Démonstrons d'abord la proposition 1. Soit E un borélien de $\mathbb{R}^\nu$, $\Omega_E = \bigcup_{\vartheta\in E} \Gamma_a(\vartheta)$ et σ le temps de sortie de Ω_E. On veut montrer que pour presque tout ϑ de E et tout z dans $\Gamma_a(\vartheta)$, ${}^{\vartheta}P^z[\sigma=\tau]$ est strictement positif. Pour cela, considérons la fonction

$$z \longmapsto \varphi(z) = p_\vartheta(z)\ {}^{\vartheta}P^z[\sigma=\tau] .$$

D'après la propriété ii) du mouvement brownien conditionné (rappelée au paragraphe 1), $\varphi(z)$ vaut :

$$\varphi(z) = p_\vartheta(z)\left(1 - {}^{\vartheta}P^z[\sigma<\tau]\right) = p_\vartheta(z) - E^z[p_\vartheta(X_\sigma) : \sigma<\tau]$$

φ est donc harmonique et positive dans Ω_E donc dans $\Gamma_a(\vartheta)$. Si elle s'annule en un point z_o de $\Gamma_a(\vartheta)$, elle est nulle pour tout z dans $\Gamma_a(\vartheta)$. Il suffit donc de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 5. - Sous les mêmes hypothèses que la proposition 1. Pour presque tout ϑ de K, quel que soit le nombre b strictement positif, ${}^{\vartheta}P^{z}[\sigma<\tau]$ tend vers 0 quand z tend vers $(\vartheta,0)$ dans $\Gamma_b(\vartheta)$.

Démonstration : soit B la boule de $\mathbb{R}^{\nu}$ centrée en ϑ, de rayon r et B' la boule centrée en ϑ de rayon $\frac{r}{2}$. Notons Λ_1 la partie de la frontière de Ω_E située dans Π au-dessus de B' et à une hauteur strictement inférieure à 1, c'est-à-dire :

$$\Lambda_1 = \{(x,y)\in\Pi \mid x\in B' \text{ et } y=\frac{1}{a}\,d(x,E)<1\} .$$

Notons Λ_2 l'ensemble $\Pi\cap(\delta\Omega_E-\Lambda_1)$. Si z est un point d'adhérence de Ω_E dans Π, on a :

$$\begin{aligned}{}^{\vartheta}P^{z}[\sigma<\tau] &= \frac{1}{p_{\vartheta}(z)}E^{z}[p_{\vartheta}(X_{\sigma})\ ;\ \sigma<\tau]\\ &= \frac{1}{p_{\vartheta}(z)}E^{z}[p_{\vartheta}(X_{\sigma})\ ;\ X_{\sigma}\in\Lambda_1] + \frac{1}{p_{\vartheta}(z)}E^{z}[p_{\vartheta}(X_{\sigma})\ ;\ X_{\sigma}\in\Lambda_2] .\end{aligned}$$

Le deuxième terme tend vers 0 quand z tend vers $(\vartheta,0)$ dans $\Gamma_b(\vartheta)$ car $p_{\vartheta}(z)$ devient infini et p_{ϑ} est bornée sur Λ_2.

Majorons maintenant le premier terme. Soit (x,y) un point de Λ_1, soit x' un point tel que $\|x-x'\|<\frac{ay}{2}$ et soit $y'=\frac{1}{a}d(x',E)$. Comme $y=\frac{1}{a}d(x,E)$, on doit avoir :

$$\frac{y}{2}\le y'\le\frac{3y}{2} \quad\text{et}\quad \|x'-\vartheta\|\le\|x-\vartheta\|+\frac{1}{2}\,d(x,E)\le\frac{3}{2}\,\|x-\vartheta\| .$$

D'où l'on déduit :

$$\frac{p_{\vartheta}(x',y')}{p_{\vartheta}(x,y)} = \frac{y'}{y}\left[\frac{\|x-\vartheta\|^2+y^2}{\|x'-\vartheta\|^2+y'^2}\right]^{\frac{\nu+1}{2}} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu+1} .$$

Si l'on appelle ϖ_{ϑ} la fonction définie dans $\mathbb{R}-\{\vartheta\}$ par

$$\varphi_{\vartheta}(x') = p_{\vartheta}\left(x', \frac{1}{a}d(x',E)\right) = \frac{\frac{1}{a}d(x',E)}{\left([\frac{1}{a}d(x',E)]^2 + \|x'-\vartheta\|^2\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

on obtient :

$$\int_{\|x-x'\|<\frac{ay}{2}} \varphi_{\vartheta}(x')p_{x'}(x,y)dx' \geq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu+1} \int_{\|x-x'\|<\frac{ay}{2}} p_{x'}(x,y)dx' .$$

Cette dernière intégrale a une valeur $C(a)$ ne dépendant que de a puisqu'elle vaut :

$$\int_{\|x'\|<\frac{a}{2}} p_{x'}(0,1)dx' .$$

D'autre part, comme x est dans B' et que $y = \frac{1}{a}d(x,\mathbf{E})$ est inférieur à $\frac{1}{a}\|x-\vartheta\|$ donc à $\frac{1}{a}r$, la boule de centre x et de rayon $\frac{ay}{2}$ est incluse dans B. En combinant ces résultats, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} p_{\vartheta}(x,y) &\leq \frac{2}{C(2a)}\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} \int_{\|x-x'\|<\frac{a}{2}} \varphi_{\vartheta}(x')p_{x'}(x,y)dx' \\ &\leq \frac{2}{C(a)}\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} \int_B \varphi_{\vartheta}(x')p_{x'}(x,y)dx' \quad ; \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire :

$$p_{\vartheta}(x,y) \leq \frac{2}{C(a)}\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} E^{(x,y)}[\varphi_{\vartheta}(X_{\tau}) \; ; \; X_{\tau} \in B]$$

(inégalité valable pour tout point (x,y) de Λ_1).

Appliquons ce résultat, et la propriété de Markov forte pour majorer le premier terme de l'expression de ${}^{\vartheta}P^z[\sigma < \tau]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_{\vartheta}(z)} E^z[p_{\vartheta}(X_{\sigma}) \; ; \; X_{\sigma} \in \Lambda_1] &\leq \frac{2}{C(a)}\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} \frac{1}{p_{\vartheta}(z)} E^z\left[E^{X_{\sigma}}[\varphi_{\vartheta}(X_{\tau}) \; ; \; X_{\tau} \in B]\right] \\ &\leq \frac{2}{C(a)}\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} \frac{1}{p_{\vartheta}(z)} E^z[\varphi_{\vartheta}(X_{\tau}) \; ; \; X_{\tau} \in B] \\ &\leq \frac{2}{C(a)}\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} \int_B \varphi_{\vartheta}(x') \frac{p_{x'}(z)}{p_{\vartheta}(z)} dx' . \end{aligned}$$

Mais si $z = (x_o, y_o)$ est dans $\Gamma_b(\vartheta)$:

$$\frac{p_{x'}(z)}{p_{\vartheta}(z)} = \left[\frac{\|x_o-\vartheta\|^2+y_o^2}{\|x_o-x'\|^2+y_o^2}\right]^{\frac{\nu+1}{2}} \le \left[1+\frac{\|x_o-\vartheta\|^2}{y_o^2}\right]^{\frac{\nu+1}{2}} \le (1+b^2)^{\frac{\nu+1}{2}} .$$

Et donc :

$$(*) \qquad \frac{1}{p_{\vartheta}(z)} E^z[p_{\vartheta}(X_\sigma) \; ; X_\sigma \in \Lambda_1] \le \frac{2}{C(a)}\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1}(1+b^2)^{\frac{\nu+1}{2}} \int_B \varphi_{\vartheta}(x')dx'$$

(inégalité valable si z est dans $\Gamma_b(\vartheta)$ et dans $\Omega_E \cup \Lambda_1$).

Supposons que ϑ a été choisi de telle sorte que φ_ϑ soit localement intégrable. Si z est dans Λ_1 , le premier membre de l'inégalité (*) vaut 1 . Si B a été choisie assez petite pour que le deuxième membre soit strictement inférieur à 1 , nous en déduisons que $\Gamma_b(\vartheta) \cap \Lambda_1$ est vide et donc que l'intersection de $\Gamma_b(\vartheta)$ avec un voisinage convenable de $(\vartheta, 0)$ est entièrement incluse dans Ω_E . L'inégalité écrite ci-dessus est donc valable pour tout point z de $\Gamma_b(\vartheta)$ suffisamment proche de $(\vartheta, 0)$.

En tenant compte du fait que le deuxième terme de l'expression de ${}^{\vartheta}P^z[\sigma<\tau]$ tend vers 0 , nous obtenons donc que, si ϑ a été choisi dans E de telle sorte que φ_ϑ soit localement intégrable, on a pour tout b :

$$\limsup_{\substack{z\to(\vartheta,0)\\ z\in\Gamma_b(\vartheta)}} {}^{\vartheta}P^z[\sigma<\tau] \le \frac{2}{C(a)}\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1}(1+b^2)^{\frac{\nu+1}{2}} \int_B \varphi_{\vartheta}(x')dx'$$

et donc :

$$\lim_{\substack{z\to\vartheta\\ z\in\Gamma_b(\vartheta)}} {}^{\vartheta}P^z[\sigma<\tau] = 0$$

puisque $\int_B \varphi_\vartheta(x')dx'$ peut être rendu arbitrairement petit par un choix convenable de B .

Il ne reste plus qu'à montrer que pour presque tout ϑ de E , φ_ϑ est localement intégrable. Il suffit pour cela de montrer que, si B_n est la boule de $\mathbb{R}^\nu$ de rayon n , pour tout entier n , pour presque tout

ϑ de E :

$$\int_{B_n} \varphi_\vartheta(x)dx < +\infty$$

ou encore

$$\int_{B_n-\bar{E}} \varphi_\vartheta(x)dx < +\infty$$

(puisque sur $\bar{E}$ (adhérence de E), φ_ϑ est nulle). Mais d'après le théorème de Fubini :

$$\int_E \left(\int_{B_n-\bar{E}} \varphi_\vartheta(x)dx\right)d\vartheta = \int_{B_n-\bar{E}} \left(\int_E \varphi_\vartheta(x)d\vartheta\right)dx \ .$$

Mais si x est dans $B_n - \bar{E}$, $\int_E \varphi_\vartheta(x)d\vartheta$ est la valeur au point $(x, d(x,E))$ de la fonction harmonique bornée dans Π ayant pour valeurs au bord 1 sur E et 0 sur $\mathbb{R}^\nu - E$ et donc $\int_E \varphi_\vartheta(x)d\vartheta \le 1$ pour tout x de $B_n - \bar{E}$.

Donc :

$$\int_E \left[\int_{B_n-\bar{E}} \varphi_\vartheta(x)dx\right]d\vartheta \le \int_{B_n} dx < +\infty \ .$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 5 et donc aussi celle de la proposition 1.

Passons maintenant à la démonstration de la proposition 4.

Soit E un borélien de $\mathbb{R}^\nu$ et $\Omega_E = \bigcup_{\vartheta \in E} \Gamma_{2a}(\vartheta)$. Notons σ le temps de sortie de Ω_E . Si $h_z(z')$ désigne la fonction de Green de Π , la fonction de Green de Ω_E $g_z(z')$ a pour expression :

$$g_z(z') = h_z(z') - E^z\left[h_{X_\sigma}(z')\right] \ .$$

Plaçons nous uniquement dans le cas $\nu > 1$ (le cas $\nu = 1$ se traite de façon analogue).

Soit $z_1 = (x_1, y_1)$ et $z = (x,y)$ deux points de Π . Notons $r_1 = \|z - z_1\|$ et $r_2 = \|z - \bar{z}_1\|$ où $\bar{z}_1$ désigne le symétrique de z , par rapport à la frontière de Π . Avec ces notations :

$$h_{z_1}(z) = \frac{1}{r_1^{\nu-1}} - \frac{1}{r_2^{\nu-1}} = (r_2^2 - r_1^2)\left[\frac{1}{r_1+r_2}\sum_{i=1}^{\nu-1}\frac{1}{r_1^i r_2^{\nu-i}}\right]$$

$$= 4y_1 y\left[\frac{1}{r_1+r_2}\sum_{i=1}^{\nu-1}\frac{1}{r_1^i r_2^{\nu-i}}\right]$$

z_1 étant fixé, quand z tend vers $(\vartheta,0)$, r_1 et r_2 tendent vers $\|z_1-(\vartheta,0)\|$ et donc :

$$\lim_{z\to(\vartheta,0)} \frac{h_{z_1}(z)}{y} = \frac{2y_1(\nu-1)}{[y_1^2+\|x_1-\vartheta\|^2]^{\frac{\nu+1}{2}}} = \frac{2(\nu-1)}{C_\nu} p_\vartheta(z_1) .$$

De ce résultat et de l'expression de $g_{z_o}(z)$, sous réserve de légitimité du passage à la limite, nous déduisons :

$$\lim_{\substack{z\to(\vartheta,0)\\ z\in\Gamma_a(\vartheta)}} \frac{g_{z_o}(z)}{y} = \frac{2(\nu-1)}{C_\nu}[p_\vartheta(z_o) - E^{z_o}[p_\vartheta(X_\sigma)]$$

$$= \frac{2(\nu-1)}{C_\nu} p_\vartheta(z_o)[1 - {}^\vartheta P^{z_o}(\sigma<\tau)]$$

$$= \frac{2(\nu-1)}{C_\nu} p_\vartheta(z_o)\,{}^\vartheta P^{z_o}(\sigma=\tau)$$

expression qui est strictement positive pour presque tout ϑ de E et tout z_o dans $\Gamma_a(\vartheta)$ d'après la proposition 1.

Il ne reste donc plus qu'à légitimer le passage à la limite sous l'espérance. Soit $z_1 = (x_1,y_1)$ dans le complémentaire de $\Gamma_{2a}(\vartheta)$ et z dans $\Gamma_a(\vartheta)$ d'ordonnée inférieure à $\frac{1}{2}$. Il existe alors une constante k ne dépendant que de a telle que $\|z_1 - z\| \geq k\|z_1 - (\vartheta,0)\|$. En effet, cela est évident si y_1 est supérieur ou égal à 1 (car l'ordonnée de z est inférieure à $\frac{1}{2}$) et si $y_1 < 1$, on a :

$$\|z_1 - z\| \geq \|z_1 - (\vartheta,0)\|\sin\alpha$$

où α désigne l'angle entre $[z_1 - (\vartheta,0)]$ et $[z - (\vartheta,0)]$. Comme z est dans $\Gamma_a(\vartheta)$ et z_1 hors de $\Gamma_{2a}(\vartheta)$ et d'ordonnée inférieure à 1 , α est minoré par Arctg 2a - Arctg a .

En reprenant les notations antérieures, cela s'écrit $r_1 \geq k\|z_1-(\vartheta,0)\|$ et comme $r_2 \geq r_1$, on a la majoration :

$$\frac{h_{z_1}(z)}{y} \leq \frac{2(\nu-1)y_1}{r_1^{\nu+1}} \leq \frac{2(\nu-1)}{k^{\nu+1}} \frac{y_1}{\|z_1-(\vartheta,0)\|^{\nu+1}} = \frac{2(\nu-1)}{C_\nu k^{\nu+1}} p_\vartheta(z_1)$$

$\frac{h_{X_\sigma}}{y}$ tend donc vers $\frac{2(\nu-1)}{C_\nu} p_\vartheta(X_\sigma)$ en étant majoré par $\frac{2(\nu-1)}{C_\nu k^{\nu+1}} p_\vartheta(X_\sigma)$ qui est P^{z_o}-intégrable, ce qui justifie le passage à la limite.

Remarque : On a vu dans la démonstration de la proposition 5 que pour presque tout ϑ de E, quel que soit $b > 0$, l'intersection de $\Gamma_b(\vartheta)$ avec un voisinage convenable de $(\vartheta,0)$ est entièrement incluse dans Ω_E. Cette observation et une très légère modification de la démonstration de la proposition 4 permettent de montrer que pour presque tout ϑ de E, pour tout b, $\frac{g_{z_o}(x,y)}{y}$ tend vers une limite strictement positive quand (x,y) tend vers $(\vartheta,0)$ dans $\Gamma_b(\vartheta)$.

BIBLIOGRAPHIE

J.M. BRELOT et L. DOOB [1] : "Limites angulaires et limites fines". Annales de l'Institut Fourier 13 (1963) pp. 395-415.

J. BROSSARD [1] : "Utilisation du mouvement brownien à l'étude du comportement à la frontière des fonctions harmoniques dans un demi-espace". Thèse dactylographiée. Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

D.L. BURKHOLDER et R.F. GUNDY [1] : "Boundary behaviour of harmonic functions in a half-space and brownian motion". Annales de l'Institut Fourier 23 (1973) pp. 195-212.

A.P. CALDERON [1] : "On the behaviour of harmonic functions near the boundary". Transactions of the American Mathematical Society 68 (1950) pp. 47-54.

A.P. CALDERON [2] : "On a theorem of Marcinkiewicz and Zygmund". Transactions of the American Mathematical Society 68 (1950) pp. 55-61.

L. DOOB [1] : "Conditionnal brownian motion and the boundary limits of harmonic functions". Bulletin de la Société Mathématique de France 85 (1957), pp. 431-468.

E.B. DYNKIN [1] : "Markov Processes" (volumes I et II). Academic Press Inc., New-York, 1965.

E.M. STEIN [1] : "On the theory of harmonic functions of several variables II". Acta Mathematica 106 (1961) pp. 137-174.

-:-:-:-

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)