Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Claude Dellacherie

Convergence en probabilité et topologie de Baxter-Chacón

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 424
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__424_0>

Université de Strasbourg
Institut de Mathématique
Séminaire de Probabilités 1976/77

CONVERGENCE EN PROBABILITE ET TOPOLOGIE DE BAXTER-CHACON

par C. Dellacherie

Comme il s'agit d'une brève remarque, nous renvoyons le lecteur à l'exposé de Meyer, dans ce volume, pour les définitions, notations, etc. Nous allons montrer ici que

sur l'ensemble des v.a. positives (finies ou non) non floues, la topologie de Baxter-Chacon coïncide avec celle de la convergence en probabilité.

Pour montrer que la convergence en probabilité définit une topologie plus fine que celle de Baxter-Chacon, il suffit de montrer que toute application de la forme $S \to E[X_S]$, où $(X_t)_{0 \leqq t \leqq \infty}$ est un processus continu et borné, est continue pour la topologie de la convergence en probabilité. Cette dernière étant métrisable, il suffit de vérifier la continuité pour les suites. Raisonnons par l'absurde : supposons que l'on puisse trouver (T_n) convergeant en probabilité vers T, avec $|E[X_{T_n}]-E[X_T]| \geqq \varepsilon > 0$ pour tout n. On obtient alors une contradiction en extrayant de (T_n) une sous-suite convergeant p.s. vers T, et en appliquant le théorème de convergence dominée.

Pour montrer que la topologie de Baxter-Chacon est plus fine que celle de la convergence en probabilité on peut, quitte à ramener $[0,\infty]$ sur $[0,1]$ par un homéomorphisme, se ramener à ne regarder que des v.a. positives $\leqq 1$. Soit alors (T_i) une famille filtrée convergeant vers T pour la topologie de Baxter et Chacon : nous allons voir que (T_i) converge aussi vers T dans L^2. On a

$$E[(T-T_i)^2] = E[T^2] - 2E[TT_i] + E[T_i^2] \text{ pour tout } i$$

Mais $E[T_i^2] = E[X_{T_i}]$ où (X_t) est le processus continu et borné défini par $X_t = \inf(t^2,1)^1$, et $E[TT_i] = E[X_{T_i}]$ où, cette fois, (X_t) est le processus continu et borné défini par $X_t(\omega)=\inf(T(\omega)t,1)$. Donc $E[T_i^2]$ converge vers $E[T^2]$ et $E[TT_i]$ aussi. D'où la conclusion.

Tout ceci s'étendrait, avec des modifications évidentes, au cas de variables (floues ou non floues) non nécessairement positives.