SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC YOR
PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur l'extension d'un théorème de Doob à un noyau σ-fini, d'après G. Mokobodzki

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 482-488
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__482_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

SUR L'EXTENSION D'UN THEOREME DE DOOB A UN NOYAU σ-FINI

par Marc YOR et P.A. MEYER, d'après G. MOKOBODZKI

1. Soient $(X,\underline{\underline{X}})$ et $(Y,\underline{\underline{Y}})$ deux espaces mesurables. La tribu $\underline{\underline{Y}}$ est supposée <u>séparable</u>. On désigne par P une probabilité sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$, et par μ un noyau de X dans Y, de base P. Autrement dit, μ est une application $x\mapsto \mu^x$ de X dans l'ensemble des mesures positives sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$, telle que

(1) <u>Pour tout</u> $x\in X$, μ^x <u>est absolument continue par rapport à</u> P.

(2) <u>Pour tout</u> $A\in\underline{\underline{Y}}$, <u>l'application</u> $x\mapsto\mu^x(A)$ <u>est</u> $\underline{\underline{X}}$<u>-mesurable</u>.

Nous supposerons dans toute la suite que <u>les mesures</u> μ^x <u>sont σ-finies sur</u> $(Y,\underline{\underline{Y}})$, et nous nous posons le problème de la validité du "théorème de Doob" :

<u>Problème</u> . <u>Existe t'il une fonction positive</u> $g(x,y)$, $\underline{\underline{X}}\otimes\underline{\underline{Y}}$<u>-mesurable</u>, <u>telle que l'on ait pour tout</u> $x\in X$

$$\frac{d\mu^x}{dP} = g(x,.) \ \underline{\text{P-p.s.}} \ ?$$

Il est bien connu que ce problème admet une réponse positive lorsque les mesures μ^x sont <u>bornées</u> : c'est là le théorème de Doob proprement dit, l'une des premières applications de la théorie des martingales. Rappelons rapidement comment on démontre cela. On représente $\underline{\underline{Y}}$ comme $\bigvee_n \underline{\underline{Y}}_n$, où $(\underline{\underline{Y}}_n)$ est une suite de sous-tribus de $\underline{\underline{Y}}$ engendrées par des partitions finies de plus en plus fines. On peut calculer explicitement

$$\frac{d\mu^x}{dP}\Big|_{\underline{\underline{Y}}_n} = g_n(x,.)$$

et vérifier que $g_n(.,.)$ est $\underline{\underline{X}}\otimes\underline{\underline{Y}}_n$-mesurable. D'après le théorème de convergence des martingales, on peut alors prendre

$$g(x,y) = \liminf_{n\to\infty} g_n(x,y)$$

Mais ce raisonnement est entièrement en défaut lorsque les mesures μ^x ne sont pas bornées. En effet, il existe alors des exemples où l'on a , pour un certain x, $g_n(x,.)=+\infty$ identiquement, et la fonction $g(x,.)$ n'est donc pas une densité de la mesure σ-finie μ^x (un tel exemple figure dans [N], remarque suivant le corollaire II.2.12, au bas de la page 31). Il y a cependant un cas où l'extension est triviale : celui où le noyau μ est <u>propre</u>. Il existe alors une fonction $u(y)$ partout >0 sur Y telle que $\mu^x(u)<\infty$ pour tout x, et l'on peut poser alors $\nu^x(dy)=u(y)\mu^x(dy)$, choisir une version mesurable $h(x,.)$ de la densité $d\nu^x/dP$, puis poser enfin

$$g(x,y) = \frac{1}{u(y)} h(x,y) \ .$$

Nous nous intéressons ici au cas général. Il semble y avoir une méthode d'attaque évidente. Puisque la mesure μ^x est σ-finie et absolument continue, on a

$$\mu^x = \lim_{n\to\infty} \mu^x \wedge (nP)$$

et on est amené au lemme suivant :

<u>Lemme 1. Les conditions suivantes sont équivalentes</u>

a) <u>Pour tout</u> n, $x \mapsto \mu_n^x = \mu^x \wedge (nP)$ <u>est un noyau</u>.

b) μ <u>vérifie le théorème de Doob</u>.

<u>Démonstration</u>. a)=>b). Le théorème de Doob étant vrai dans le cas borné, soit $g_n(x,y)$ une fonction $\underline{\underline{X}}\otimes\underline{\underline{Y}}$-mesurable telle que $g_n(x,.)$ soit densité de μ_n^x pour tout x. Alors $g(x,y) = \sup_n g_n(x,y)$ est mesurable, et $g(x,.)$ est densité de μ^x pour tout x.

b)=>a). Soit $g(x,y)$ une fonction $\underline{\underline{X}}\otimes\underline{\underline{Y}}$-mesurable telle que $g(x,.)$ soit densité de μ^x pour tout x. Alors pour tout $A \in \underline{\underline{Y}}$ on a

$$\mu_n^x(A) = \int_A g(x,y) \wedge n \, dP(y)$$

et il est évident que μ_n est un noyau.

2. On va maintenant regarder les choses de manière plus approfondie, et il nous faut pour cela quelques notations.

Nous désignons par $\bar{F}$ l'ensemble de toutes les classes de variables aléatoires positives, <u>finies ou non</u>, sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$, par F l'ensemble des classes de v.a. <u>finies</u> et positives, par F_b enfin l'ensemble des classes <u>intégrables</u> et positives ($F_b = L_+^1(\underline{\underline{Y}},P)$).

Il est bien connu que $\bar{F}$ est un espace polonais pour la topologie de la convergence en probabilité. Nous désignerons par Π la tribu borélienne correspondante sur $\bar{F}$, et aussi la tribu induite sur F ou F_b, le contexte se chargeant d'indiquer sur quel espace on se trouve.

Il y a une autre tribu intéressante sur $\bar{F}$, c'est la tribu engendrée par les applications $f \mapsto \int_A f dP$, où A parcourt $\underline{\underline{Y}}$. Nous la désignerons par $\underline{\underline{T}}$, et nous noterons de même par $\underline{\underline{T}}$ les tribus induites sur F, F_b.

On a $\underline{\underline{T}} \subset \Pi$. En effet, l'application $f \mapsto \int_A f \, dP = \sup_n \int_A f \wedge n \, dP$ est s.c.i., donc borélienne, pour la convergence en probabilité. Cela nous autorise à appeler $\underline{\underline{T}}$ la <u>tribu faible</u>, Π la <u>tribu forte</u>, sur $\bar{F}$, F ou F_b.

Une application mesurable de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(F,\underline{\underline{T}})$ est exactement ce que nous avons appelé un <u>noyau</u> (à mesures σ-finies, de base P) ; il nous arrivera de préciser en disant : <u>noyau faible</u>. Nous appellerons <u>noyau fort</u> une application mesurable de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans (F,Π).

La proposition suivante nous indique quelle est la propriété de F_b qui "fait marcher" le théorème de Doob, et où se trouve le problème dans le cas général.

<u>Proposition 1</u>. a) <u>Sur</u> F_b , <u>les tribus</u> Π <u>et</u> T <u>sont égales</u>.

b) <u>Un noyau</u> μ <u>satisfait au théorème de Doob si et seulement s'il est fort</u>.

<u>Démonstration</u>. Il y a bien des manières de prouver a). L'argument suivant est rapide : on sait que sur un espace de Banach séparable, tel que $L^1(\underline{\underline{Y}},P)$, la tribu borélienne de la topologie de la norme coincide avec celle de la topologie faible. Cette égalité s'induit sur $F_b=L^1_+$. Or sur F_b la tribu faible est $\underline{\underline{T}}$, tandis que Π est intermédiaire entre les deux tribus précédentes.

Si μ est un noyau fort, $x\mapsto \mu^x\wedge(nP)$ est un noyau fort, car $f\mapsto f\wedge n$ est une application continue de F dans F. Donc μ satisfait au théorème de Doob d'après le lemme 1.

Inversement, supposons que $g(x,y)$ soit une fonction $\underline{\underline{X}}\otimes\underline{\underline{Y}}$-mesurable positive, et que $\mu^x= g(x,.)P$ pour tout x. Soit B la boule de centre $h\in F$ et de rayon a dans F

$$B = \{ f\in F : E[|f-h|\wedge 1]<a \}$$

Pour montrer que l'image réciproque de B par μ est $\underline{\underline{X}}$-mesurable, il suffit de vérifier que la fonction

$$x\longmapsto \int_Y |g(x,y)-h(y)|\wedge 1 \; dP(y)$$

est mesurable, ce qui est évident. Donc μ est $(\underline{\underline{X}}/\Pi)$-mesurable.

3. Nous passons maintenant aux choses nouvelles, c'est à dire à l'existence de noyaux qui ne satisfont pas au théorème de Doob. Il suffit de démontrer pour cela que les tribus $\underline{\underline{T}}$ et Π ne sont pas identiques en général, ce qui résulte du théorème suivant :

<u>Proposition</u> 2. <u>Si l'espace probabilisé</u> $(Y,\underline{\underline{Y}},P)$ <u>est sans atomes</u>, <u>la tribu</u> $\underline{\underline{T}}$ <u>n'est pas séparable</u>. <u>En particulier</u>, <u>on a</u> $\underline{\underline{T}}\neq\Pi$.

On déduit de là que T=Π dans le seul cas où l'espace probabilisé est purement atomique.

Pour démontrer cette proposition, nous rappelons quelques résultats très élémentaires de théorie de la mesure. D'abord, l'absence d'atomes s'énonce ainsi :

(*) *Pour tout* $C\in\underline{\underline{Y}}$ *non négligeable, il existe* $C'\in\underline{\underline{Y}}$, $C'\subset C$ *tel que* $0<P(C')<P(C)$.

On construit alors immédiatement une suite décroissante $C'_n \subset C$, avec $P(C'_{n+1})<P(C'_n)$ pour tout n. Considérant les ensembles $C'_n\setminus C'_{n+1}$, on voit que :

($\underline{*}$) *Pour tout* $C\in\underline{\underline{Y}}$ *non négligeable et tout* $\varepsilon>0$, *il existe* $C_\varepsilon\in\underline{\underline{Y}}$, $C_\varepsilon\subset C$ *tel que* $0<P(C_\varepsilon)<\varepsilon$.

Au moyen de ces résultats, nous démontrons le lemme suivant (une démonstration très simple peut se déduire aussi de la note de Dellacherie sur le lemme de Borel-Cantelli, dans ce volume)

Lemme 2. Supposons $(Y,\underline{\underline{Y}},P)$ *sans atomes. Soit* $(C_n)_{n>0}$ *une suite d'éléments de* $\underline{\underline{Y}}$ *non négligeables. Il existe alors* $g\in F$ *telle que*

$$\int_{C_n} g\, dP = +\infty \quad \textit{pour tout } n .$$

Démonstration. 1) Nous traitons le cas d'un seul $C\in\underline{\underline{Y}}$ non négligeable. D'après (*) nous choisissons une suite décroissante (C'_k) d'éléments de $\underline{\underline{Y}}$ tels que $C'_0\subset C$, $P(C'_k)>P(C'_{k+1})>0$ pour tout k, et nous prenons g de la forme

$$g = \Sigma_k\, a_k 1_{C'_k\setminus C'_{k+1}}$$

où les a_k sont des constantes >0 choisies de sorte que $\int_C g dP = +\infty$.

2) Donnons nous une fonction $u\in F$, un ensemble C comme ci-dessus, un nombre $\varepsilon>0$, et montrons qu'il existe $v\in F$ telle que

$$\int_C v\, dP = +\infty \ , \ v\geqq u \text{ partout} \ , \ P\{v\geqq u+\varepsilon\} \leqq \varepsilon \ .$$

A cet effet, nous choisissons d'après ($\underline{*}$) un $C_\varepsilon\subset C$, $C_\varepsilon\in\underline{\underline{Y}}$ tel que $0<P(C_\varepsilon)<\varepsilon$, puis d'après 1) une fonction $g\in F$ telle que $\int_{C_\varepsilon} g\, dP = +\infty$. Nous prenons alors $v=u$ sur $Y\setminus C_\varepsilon$, $v=g\vee u$ sur C_ε .

3) Démontrons enfin l'énoncé. Nous construisons par récurrence une suite $(g_n)_{n\geqq 0}$ d'éléments de F tels que

- $g_0=1$
- $\int_{C_{n+1}} g_{n+1}\, dP = +\infty$, $g_{n+1}\geqq g_n$, $P\{g_{n+1}\geqq g_n+2^{-n}\} \leqq 2^{-n}$

ce qui est possible d'après 2). Nous posons $g= \lim_n g_n$; la dernière condition assure que $g\in F$, et g satisfait à l'énoncé.

Démonstration de la proposition 2. Supposons $\underline{\underline{T}}$ séparable, et déduisons en une contradiction. $\underline{\underline{T}}$ étant séparable et engendrée par les applications $f\mapsto \int_C f\, dP$, il existe une suite (C_n) d'éléments de $\underline{\underline{Y}}$, que l'on peut évidemment supposer non négligeables, tels que les applications $f \mapsto \int_{C_n} f\,dP$ engendrent $\underline{\underline{T}}$. Alors la relation

$$(f \in F,\ \bar{f} \in F,\ \forall n \int_{C_n} f dP = \int_{C_n} \bar{f} dP \ ) \text{ entraîne } (\ \forall A \in \underline{\underline{Y}}\ ,\ \int_A f dP = \int_A \bar{f} dP\ ).$$

Soit g la fonction construite dans le lemme 2. Prenant $f=g$, $\bar{f}=g+1$, on voit que $\int_A g\,dP = \int_A (g+1)dP$ pour tout $A \in \underline{\underline{Y}}$. Prenant $A=\{g \leq n\}$, on voit que $P(A)=0$, d'où $g=0$, ce qui est absurde.

4. Faisons une courte digression. Ce que la démonstration précédente montre, en fait, c'est que les applications $f \mapsto \int_A f dP$ ($A \in \underline{\underline{Y}}$) séparent les points de F, mais qu'il n'existe aucune sous-famille dénombrable séparant les points de F. Il ne faut pas s'en étonner : la tribu Π est en effet une tribu de Blackwell sur F, comme on va le voir dans un instant. S'il existait une tribu séparable $\underline{\underline{T}}' \subset \underline{\underline{T}}$ séparant les points de F, on aurait $\underline{\underline{T}}'=\underline{\underline{T}}=\Pi$ d'après le théorème de Blackwell.

<u>Lemme 3</u>. <u>F est borélien dans $\bar{F}$</u>.
<u>Démonstration</u>. Pour toute $f \in \bar{F}$ posons $k_n(f) = \int_Y (\frac{f}{1+f})^n dP$. Les fonctions k_n sont continues sur F, et tendent en décroissant vers la fonction $k(f)= P\{f=+\infty\}$. L'ensemble $F=\{f : k(f)=0\}$ est donc l'intersection des ensembles $\{ f : k(f)< 1/m \}$, qui sont ouverts puisque $k=\inf_n k_n$ est s.c.s.. Donc F est un G_δ dans $\bar{F}$, et en particulier F est polonais.

[Ce blanc est dû à C. Dellacherie, qui a trouvé la démonstration très simple ci-dessus, au lieu d'une démonstration compliquée de P.A. Meyer prouvant seulement que F était analytique dans $\bar{F}$].

5. Il semble difficile de reconnaître a priori si un noyau est un noyau fort. Aussi est il intéressant d'étudier des variantes de cette condition, peut être plus faciles à vérifier. Désignons par E l'image de $\underline{\underline{Y}}$ par l'application $A \mapsto I_A$ de $\underline{\underline{Y}}$ dans $L^\infty(\underline{\underline{Y}},P)$, et par $\underline{\underline{E}}$ la tribu induite par L^∞.
<u>Définition</u>. <u>Un noyau</u> μ <u>de</u> X <u>dans</u> Y (<u>de base</u> P, <u>à mesures σ-finies</u>), <u>est dit</u> mesurable <u>si l'application</u> $(x,A) \mapsto \mu^x(A)$ <u>est</u> $\underline{\underline{X}} \otimes \underline{\underline{E}}$-<u>mesurable</u>.

Lemme 4. Tout noyau fort est mesurable.

Démonstration. Nous savons que, si μ est un noyau fort, il satisfait au théorème de Doob. Or soit $g(x,y)$ une fonction positive $\underline{\underline{X}}\otimes\underline{\underline{Y}}$-mesurable. L'application

$$(x,A) \mapsto \int_A g(x,y)\, dP(y)$$

est $\underline{\underline{X}}\otimes\underline{\underline{E}}$-mesurable. On se ramène en effet, par troncation, au cas où g est bornée ; puis, par classes monotones, au cas où $g(x,y)=u(x)v(y)$ ($u\in b(\underline{\underline{X}})$, $v\in b(\underline{\underline{Y}})$), et le résultat est alors évident.

Inversement, un noyau mesurable est "presque" un noyau fort : il devient fort au prix d'un léger élargissement de la tribu $\underline{\underline{X}}$.

Proposition 3. Soit μ un noyau mesurable de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$, et soit $\hat{\underline{\underline{X}}}$ la tribu engendrée par les ensembles $\underline{\underline{X}}$-analytiques. Alors μ est un noyau fort de $(X,\hat{\underline{\underline{X}}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$.

Corollaire. Il existe une fonction $g(x,y)$ $\hat{\underline{\underline{X}}}\otimes\underline{\underline{Y}}$-mesurable et positive, telle que $g(x,.)$ soit une densité de μ^x pour tout $x\in X$.

Démonstration. Il nous suffit de démontrer que pour tout n, la fonction $x \mapsto \mu^x\wedge(nP)$ est un noyau de $(X,\hat{\underline{\underline{X}}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$, ou encore, que pour tout $A\in\underline{\underline{Y}}$, la fonction

$$x \mapsto nP(A) - < (nP-\mu^x)^+, 1_A > = nP(A) - \sup_{B\subset A} [nP(B)-\mu^x(B)]$$

est $\hat{\underline{\underline{X}}}$-mesurable. Or soit la fonction $\underline{\underline{X}}\otimes\underline{\underline{E}}$-mesurable sur $X\otimes E$

$$j(x,B) = nP(B) - \mu^x(B)$$

et soit $h(x) = \sup_{B\subset A} j(x,B)$. L'ensemble $\{x|\ h(x)>a\}$ est la projection sur X de l'ensemble

$$G = \{(x,B) : j(x,B)>a \ ,\ B\subset A \}$$

Or l'ensemble des $B\in E$ tels que $B\subset A$ est fermé dans E , donc G est borélien, et sa projection sur X est analytique, et enfin $\hat{\underline{\underline{X}}}$-mesurable.

Remarque. La démonstration permet de prouver un peu mieux : si μ est un noyau mesurable, les fonctions $(x,A) \mapsto (\mu^x\wedge(nP))(A)$ sont $\underline{\underline{X}}\otimes\underline{\underline{E}}$-coanalytiques au sens de [PP], III.61.

6. Nous avons vu plus haut qu'il existe des noyaux faibles qui ne sont pas forts. Le modèle de ces noyaux s'obtient en prenant $(X,\underline{\underline{X}})=(F,\underline{\underline{T}})$, μ étant l'application identique de F sur F. Ce même modèle montre qu'il existe des noyaux faibles qui ne sont pas pas mesurables. En effet, que signifierait la mesurabilité de ce noyau ? Que l'application $(f,A) \mapsto \int_A f dP$ de $F\times E$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est $\underline{\underline{T}}\otimes\underline{\underline{E}}$-mesurable. Or si elle l'était, elle le serait

encore par rapport à la tribu sur $F\times E$ engendrée par une suite de rectangles $A_n\times B_n$ ($A_n\in\underline{\underline{T}}$, $B_n\in\underline{\underline{E}}$), et par conséquent par rapport à $\underline{\underline{S}}\otimes\underline{\underline{E}}$, où $\underline{\underline{S}}$ est la tribu séparable engendrée par les A_n. Mais alors $\underline{\underline{T}}$ serait égale à $\underline{\underline{S}}$, et donc séparable, ce qui est faux (proposition 2).

REFERENCES

[N] : J. Neveu , **Martingales à** temps discret, Masson, Paris, 1972.

[PP] : C. Dellacherie et P.A. Meyer, Probabilités et Potentiel A, Hermann, Paris 1975.

L'article de G. Mokobodzki paraîtra sans doute au Séminaire d'Initiation à l'analyse (G. Choquet), ou au Séminaire de Théorie du Potentiel IV (Lecture Notes in M. Springer-Verlag).