SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Appendice à l'exposé de Mokobodzki

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 509-511

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__509_0>

APPENDICE A L'EXPOSE DE MOKOBODZKI

par C. Dellacherie

Nous supposons connu du lecteur l'introduction de l'exposé de Mokobodzki, dont nous adoptons la terminologie et les notations.

I.- LA CONDITION (N) DE LUSIN ET LES THEOREMES DE BANACH [1)]

La première rencontre historique des problèmes 1 et 2 remonte assez loin dans le contexte suivant : X et Y sont des intervalles compacts de $\mathbb{R}$ et F est le graphe d'une fonction continue f de X dans Y ; la mesure μ sur Y et la mesure λ sur X dominant la capacité $\underline{\underline{C}}$ étant (la restriction de) la mesure de Lebesgue, que nous noterons encore λ. Disons tout de suite, avant de donner plus de détails, que, sans être triviaux, les deux problèmes sont beaucoup plus faciles à résoudre dans le cas d'un tel graphe (même si f est seulement borélienne), et que la résolution de ces cas particuliers n'apporte guère de lumière pour l'étude de la situation générale.

D'après Lusin, on dit que la fonction continue f de X dans Y (intervalles de $\mathbb{R}$) vérifie la condition (N) si

$$\lambda(A) = 0 \Rightarrow \lambda[f(A)] = 0$$

Cette condition s'introduit naturellement dans l'étude de l'intégrale de Denjoy (pour tout ce §I , voir le livre de Saks "Theory of the Integral" , plus particulièrement le chapitre IX). La lettre N étant l'initiale du prénom de Lusin, Banach a introduit ensuite la condition (S) suivante, vérifiée ou non par notre fonction f

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \lambda(A) < \delta \Rightarrow \lambda[f(A)] < \varepsilon$$

On reconnait en (N) et (S) respectivement les hypothèses des problèmes 1 et 2 dans le cas où F est le graphe de la fonction f . Et Banach a résolu dans ce cas ces problèmes sous la forme suivante :

1) Si f vérifie la condition (N), alors f vérifie la condition (T_2) suivante : pour presque tout y , $f^{-1}(\{y\})$ est dénombrable.

2) La fonction f vérifie la condition (S) ssi elle vérifie la condition (N) et la condition (T_1) suivante : pour presque tout y , $f^{-1}(\{y\})$ est fini.

Je n'ai pas trouvé dans Saks l'évocation de la réciproque de 1). Par ailleurs, l'extension (facile) de 1) et 2) aux fonctions Lebesgue-

---

1) Je développe ici une note historique que m'a communiquée personellement J. Horowitz.

mesurables a été notée pour la première fois par Federer et Morse, Bull. AMS 1943 (où l'on trouve aussi l'introduction, pour la première fois si je ne m'abuse, d'un théorème de section en théorie de la mesure).

II.- UN THEOREME DE TALAGRAND

La première rencontre des problèmes (en l'occurrence, du problème 1) lorsque F n'est pas un graphe est par contre assez récente. C'est Talagrand (C. R. Acad. Sc. Paris 280, 853-855 (1975)) qui a étudié et résolu le problème suivant : soit A une partie analytique de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout ensemble N de λ-mesure nulle, l'ensemble $A+N = \{z : z = x+y\ , x \in A\ , y \in N\}$ soit encore de mesure nulle ; dans ces conditions, est-ce que A est forcément au plus dénombrable ? On tombe sur un cas particulier du problème 1 si on considère

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x - y \in A\}$$

Mais Talagrand ne s'était pas aperçu de la formulation générale du problème, utilisant plutôt la structure de groupe topologique de $\mathbb{R}$ et le fait que λ en est la mesure de Haar (si bien qu'il a étendu son résultat à certains groupes topologiques). Notons cependant que, dans ce cadre, il existe des extensions du problème de Talagrand en des problèmes sur les produits de convolution, qui ne sont pas résolus.

III.- LA RECIPROQUE DU PROBLEME 2

Dans son introduction, Mokobodzki s'est contenté de signaler que la réciproque du problème 2 était vraie, et relativement aisée à établir. Par souci de complétude, nous donnons ici la démonstration d'Horowitz de ce fait (qui date de plusieurs années)

THEOREME.- Soit λ une mesure sur X dominant $\underline{\underline{C}}$, et supposons que, pour μ-presque tout y, la coupe $C_y(F)$ est finie. Alors $\underline{\underline{C}}$ est absolument continue par rapport à λ.

D/ Pour B borélien de X, posons $\Psi(B) = \int_Y \nu(y,B)\,\mu(dy)$, où $\nu(y,B)$ est le cardinal de $C_y(F\cap P_X^{-1}(B))$ - il est facile de voir que c'est une fonction mesurable en y pour B fixé. Comme $\underline{\underline{C}}$ est dominée par λ, on a $\lambda(B)=0 \Rightarrow \Psi(B)=0$. Etant donné $\varepsilon>0$, choisissons un entier N assez grand pour que l'on ait $\mu(\{y : \nu(y) > N\} < \varepsilon/2$, où $\nu(y) = \nu(y,X)$, ce qui est possible car les coupes $C_y(F)$ sont presque-toutes finies. Alors, pour B borélien de X, on a

$$\begin{aligned}\underline{\underline{C}}(B) &\leq \mu^*[P_Y(F\cap P_X^{-1}(B))\cap\{\nu > N\}] + \mu^*[P_Y(F\cap P_X^{-1}(B))\cap\{\nu \leq N\}]\\ &\leq (\varepsilon/2) + \mu^*[P_Y(F\cap P_X^{-1}(B))\cap\{\nu \leq N\})\end{aligned}$$

Maintenant, on peut écrire

$$\mu^*[P_Y(\ldots)\cap\{\nu\leq N\} \leq \int_Y \nu(y,B)\, 1_{\{\nu\leq N\}}\, d\mu = \Psi_N(B) \leq \Psi(B)$$

La mesure ψ_N est finie et absolument continue par rapport à λ. Ainsi, il existe $\delta>0$ tel que $\lambda(B)<\delta \Rightarrow \psi_N(B)<\varepsilon/2$. D'où la conclusion.

IV.- UNE APPLICATION DES RESULTATS DE MOKOBODZKI

Je voudrais signaler, pour terminer, que les résultats de Mokobodzki m'ont permis de résoudre positivement "le" dernier problème sur la structure des ensembles semi-polaires - problème qui me narguait depuis huit ans (cf "une conjecture sur les ensembles semi-polaires" dans le volume VII du Séminaire, Lecture Notes N°321) : si (P_t) est un semi-groupe fortement markovien, vérifiant l'hypothèse (L), sur un espace d'états E polonais, alors une partie presque-borélienne G de E est semi-polaire ssi aucun point de G n'est régulier pour lui-même et G vérifie l'une des conditions suivantes

1) si $(B_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de boréliens disjoints contenus dans G, alors, pour tout $i\in I$, B_i est polaire sauf au plus pour une infinité dénombrable d'indices.

2) $(\Omega,(X_t),\ldots)$ étant l'espace canonique associé à (P_t), pour presque tout $\omega\in\Omega$, l'ensemble $G\cap X(\mathbb{R}_+,\omega)$ est au plus dénombrable (où on note $X(J,\omega)$ l'image de J par l'application $t\rightarrow X_t(\omega)$).

Je projette d'écrire un article de synthèse sur la structure des ensembles semi-polaires, mais je ne sais encore s'il sera achevé à temps pour paraître dans ce volume XII du Séminaire.