SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

# Supports optionnels et prévisibles d'une P-mesure et applications

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 12 (1978), p. 515-522

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__515_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

# SUPPORTS OPTIONNELS ET PREVISIBLES D'UNE P-MESURE ET APPLICATIONS

par C. Dellacherie

On se place sous les conditions habituelles. Suivant la terminologie adoptée pour le second tome du livre rose (i.e. la nouvelle édition de "Probabilités et Potentiels"), nous appellerons P-mesure toute mesure (positive, bornée) m sur $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \times \underline{\underline{F}})$ qui ne charge pas les ensembles évanescents. A une telle mesure est associé de manière essentiellement unique (i.e., à l'indistinguabilité près) un processus croissant[1] $(A_t)$ tel que, pour tout processus mesurable positif $(X_t)$,

$$m(X) = E[\int_{[0,\infty]} X_t \, dA_t]$$

On définit la projection optionnelle $m^o$ et la projection prévisible $m^p$ par

$$m^o(X) = m(X^o) \qquad m^p(X) = m(X^p)$$

où $X^o$ (resp $X^p$) est la projection optionnelle (resp prévisible) du processus mesurable positif X ; la P-mesure m est dite optionnelle (resp prévisible) si $m = m^o$ (resp $m = m^p$). Noter que le processus croissant associé à $m^o$ (resp $m^p$) n'est autre que la projection duale optionnelle (resp prévisible) de $(A_t)$.

Avant de définir diverses notions de support pour une P-mesure, rappelons le résultat suivant, démontré dans mon exposé "Sur l'existence de certains ess.inf..." de ce volume.

THEOREME 1.- *Soit* $(H_i)_{i\in I}$ *une famille non vide d'ensembles mesurables dont les coupes parallèles à* $\mathbb{R}_+$ *sont fermées pour la topologie droite*[2] *(resp gauche). Si* $(H_i)_{i\in I}$ *est stable pour les intersections dénombrables, alors il existe* $j\in I$ *tel que l'ensemble* $(H_j - H_i)$ *soit évanescent pour tout* $i\in I$.

Nous dirons, par abus de langage, que cet ensemble $H_j$ est le plus petit élément de $(H_i)_{i\in I}$ : il est uniquement défini à un ensemble évanescent près.

Rappelons aussi quelques résultats sur les fermés aléatoires consignés

---

1) sous-entendu continu à droite

2) nous dirons que $H_i$ est un fermé droit mesurable

dans les $n^{os}$ IV-89 et suivants du livre rose. Si H est une partie de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, nous notons $\overline{H}$ (resp ${}^d\overline{H}$, ${}^g\overline{H}$) l'ensemble dont les coupes parallèles à $\mathbb{R}_+$ sont les adhérences (resp adhérences à droite, à gauche) des coupes correspondantes de H.

a) Si H est mesurable, alors $\overline{H}, {}^d\overline{H}$ et ${}^g\overline{H}$ sont mesurables

b) Si H est optionnel, alors $\overline{H}$ et ${}^g\overline{H}$ sont optionnels, mais, en général, ${}^d\overline{H}$ est seulement progressif

c) Si H est prévisible, alors ${}^g\overline{H}$ est prévisible.

De plus, si H est mesurable, $\{\overline{H} - {}^d\overline{H}\}$ et $\{\overline{H} - {}^g\overline{H}\}$ sont égaux à la réunion d'une suite de graphes de v.a., qu'on peut choisir optionnelles (resp prévisibles) si l'ensemble en question est optionnel (resp prévisible).

Venons en à la définition de différents supports pour une P-mesure m. Nous appellerons <u>support</u> de m (resp <u>support droit</u>, <u>support gauche</u>, <u>support précisé</u>) le plus petit fermé mesurable portant m (resp le plus petit fermé droit mesurable, le plus petit fermé gauche mesurable, l'intersection des deux précédents) que nous noterons S(m) (resp $S^d(m)$, $S^g(m)$, $S'(m)$). Si $(A_t)$ est le processus croissant associé à m, il est facile de voir qu'on a les égalités

$S(m) = \{$points de croissance de $(A_t)\}$

$S^d(m) = \{$points de croissance à droite + instants de saut de $(A_t)\}$

$S^g(m) = \{$points de croissance à gauche de $(A_t)\}$

D'autre part, on a aussi les égalités

$$\overline{S'} = S \quad , \quad {}^d\overline{S'} = S^d \quad , \quad {}^g\overline{S'} = S^g \quad , \quad S = S^d \cup S^g$$

Maintenant, nous définissons la notion de <u>support optionnel</u> de m (resp <u>support optionnel droit</u>, <u>gauche</u>, <u>précisé</u>) en remplaçant, dans la définition ci-dessus, "mesurable" par "optionnel", et de même les notions <u>prévisibles</u> correspondantes. Nous noterons, par exemple, $S_o^g(m)$ le support optionnel gauche de m et $S_p'(m)$ le support prévisible précisé de m. Notre but est d'étudier les rapports entre les supports optionnels (resp prévisibles) de m et les supports de $m^o$ (resp $m^p$). Voici d'abord quelques relations simples entre les divers supports de la P-mesure m

$$S \subset S_o \subset S_p \quad , \quad S^d \subset S_o^d \subset S_p^d \quad , \quad S^g \subset S_o^g \subset S_p^g \quad , \quad S' \subset S_o' \subset S_p'$$

$$\overline{S_o'} = S_o \quad , \quad {}^d\overline{S_o'} = S_o^d \quad , \quad {}^g\overline{S_o'} = S_o^g \quad , \quad S_o = S_o^d \cup S_o^g$$

$$\overline{S_p'} \subset S_p \quad , \quad {}^d\overline{S_p'} \subset S_p^d \quad , \quad {}^g\overline{S_p'} = S_p^g$$

La seule relation non triviale est la deuxième égalité de la deuxième ligne. Pour montrer que ${}^d\overline{S_o'} = S_o^d$, il suffit de montrer que ${}^d\overline{S_o'}$, que l'on sait progressif, est bien optionnel. Or $({}^d\overline{S_o'} - S_o')$ est contenu dans $(\overline{S}_o^d - S_o^d) \cup (\overline{S}_o^g - S_o^g)$ et donc dans la réunion d'une suite de graphes de t.d'a. ; comme il est progressif, il est lui-même égal à une telle réunion, si bien que ${}^d\overline{S}'_o$ est optionnel. La même démonstration montre que ${}^d\overline{S}'_p$ est aussi optionnel ; mais comme, en général, il n'est pas prévisible, on a seulement l'inclusion ${}^d\overline{S}'_p \subset S^d_p$ (la différence peut être grande : ainsi, si $(\underline{\underline{F}}_t)$ est la filtration d'un processus de Poisson, si T désigne le temps du 1er saut et si $(A_t) = ((t-T)^+)$, $S^g_p = ]\!]T,\infty[\![$ tandis que $S^d_p = [\![0,\infty[\![$ ).

THEOREME 2.- Soient m une P-mesure et $m^o$ sa projection optionnelle. On a les relations suivantes entre les supports de $m^o$ et les supports optionnels de m :

a) $S(m^o)$ est optionnel et $S(m^o) = S_o(m)$

b) $S^d(m^o)$ est progressif, $S^d(m^o) \subset S^d_o(m)$ et $S^d_o(m)$ est le plus petit fermé droit optionnel contenant $S^d(m^o)$. L'ensemble $(S^d_o(m) - S^d(m^o))$ est un ensemble progressif, de projection optionnelle nulle, égal à la réunion d'une suite de graphes de v.a.[1]

c) $S^g(m^o)$ est optionnel et $S^g(m^o) = S^g_o(m)$

D/ Les ensembles optionnels portant m étant les mêmes que ceux portant $m^o$, il suffit, pour démontrer a) et c), de prouver que $S^g(m^o)$ est optionnel. Soit $({}^oA_t)$ le processus croissant, optionnel, associé à $m^o$ et, pour $r \in \mathbb{Q}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $T^n_r$ le t.d'a. défini par

$$T^n_r(\omega) = \inf\{t > r : {}^oA_t(\omega) \geq {}^oA_r(\omega) + \tfrac{1}{n}\}$$

Alors, $S^g(m^o)$ est égal à l'adhérence gauche de l'ensemble optionnel $(\{0\} \times \{{}^oA_0 > 0\}) \cup (\bigcup_{r,n} [\![T^n_r]\!])$ et est donc optionnel (remarquer qu'il est prévisible si le processus croissant est prévisible, le début d'un fermé droit prévisible étant prévisible). De même, $S^d(m^o)$ est progressif puisque c'est l'adhérence droite de l'ensemble optionnel H égal à $(\{0\} \times \{{}^oA_0 > 0\}) \cup (\bigcup_r [\![T_r]\!])$ où $T_r(\omega) = \inf\{t > r : {}^oA_t(\omega) > {}^oA_r(\omega)\}$. Comme $\overline{H} = S(m^o)$, l'ensemble progressif $(S^d_o(m) - S^d(m^o))$, contenu dans $(\overline{H} - {}^d\overline{H})$, est la réunion d'une suite de graphes de v.a.. Enfin, si cet ensemble progressif contient un graphe de t.d'a. T, pour $\omega \in \{T < \infty\}$, $T(\omega)$ ne peut être une extrémité gauche d'intervalle contigu à $S^d(m^o)(\omega)$ et donc le début U de $]\!]T,\infty[\![ \cap S^d(m^o)$ est $> T$ sur $\{T < \infty\}$ ; comme $m^o([\![T,U[\![) = 0$, on a aussi $m([\![T,U[\![) = 0$ si bien que $(S^d_o(m) - [\![T,U[\![)$ est un fermé droit optionnel portant m : on en déduit que $[\![T]\!]$ est évanescent.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer le théorème suivant, sur les supports prévisibles : ici, seul le support gauche est "correct"

THEOREME 3.- Soient m une P-mesure et $m^p$ sa projection prévisible. On a les relations suivantes entre les supports de $m^p$ et les supports prévisibles de m :

------------

1) il est probable que $S^d(m^o)$ est le plus petit fermé droit progressif portant m .

a) $S(m^p)$ <u>est optionnel</u>, $S(m^p) \subset S_p(m)$ <u>et</u> $S_p(m)$ <u>est le plus petit fermé prévisible contenant</u> $S(m^p)$

b) $S^d(m^p)$ <u>est progressif</u>, $S^d(m^p) \subset S_p^d(m)$ <u>et</u> $S_p^d(m)$ <u>est le plus petit fermé droit prévisible contenant</u> $S^d(m^p)$

c) $S^g(m^p)$ <u>est prévisible et</u> $S^g(m^p) = S_p^g(m)$ .

REMARQUES.- 1) La majeure part des théorèmes 2 et 3 fait partie du "folklore". Une étude précise de $S_p^g(m)$ quand le processus croissant associé est de la forme $A_t = 1_{\{L<t\}}$, où L est la fin d'un ensemble prévisible, a été faite par Azéma (cf l'exposé de Meyer dans le volume VII)

2) On peut avoir, pour une P-mesure prévisible m , $S^d(m)$ progressif, non optionnel : c'est le cas de la P-mesure associée au temps local en 0 d'un mouvement brownien issu de 0 (on retrouve alors, dans l'ensemble $(S_p^d(m) - S^d(m))$, l'exemple classique de progressif non optionnel).

3) Le théorème 1 permet aussi de définir le plus petit fermé (droit ou gauche) optionnel ou prévisible contenant un ensemble mesurable H . Mais cela peut se faire aussi en termes de P-mesures car il existe toujours une P-mesure m vérifiant les conditions suivantes : m est à la fois portée par H et par une réunion dénombrable de graphes de v.a., et H est contenu dans le support précisé de m (c'est un bon exercice sur le théorème de section). C'est d'ailleurs, finalement, la démarche adoptée pour démontrer le théorème 1.

A première vue, il semble que la situation est meilleure du côté optionnel que du côté prévisible. Mais, il n'en est rien, pour la raison suivante : à cause de la génération de la tribu optionnelle, et aussi du théorème de Mertens qui assure que la projection optionnelle d'un processus mesurable s.c.s. pour la topologie droite est encore s.c.s. pour la topologie droite, on est souvent amené, dans le cas optionnel, à considérer des fermés droits mesurables, et le b) du théorème 2 ne nous assure pas d'égalité, tandis que, dans le cas prévisible et pour des raisons analogues, ce sont souvent des fermés gauches mesurables qu'on est amené à considérer, et le c) du théorème 3 nous assure une égalité. Nous verrons un exemple frappant, à propos de variables honnêtes, après deux applications intéressantes des théorèmes précédents à l'étude des projections optionnelle et prévisible .

Les applications tournent autour du problème suivant : soit N un ensemble mesurable, de projection optionnelle (resp prévisible) nulle (d'après le théorème de section, cela équivaut au fait que $m^o(N) = 0$ (resp $m^p(N) = 0$) pour toute P-mesure m) ; quand peut-on affirmer que N est évanescent (d'après le théorème de section pour une filtration triviale, cela équivaut au fait que $m(N) = 0$ pour toute P-mesure m) ?

THEOREME 4.- <u>Soit</u> H <u>un fermé gauche mesurable et soit</u> M <u>un ensemble prévisible</u> (<u>resp optionnel</u>) <u>tel que</u> $N = M - H$ <u>ait une projection prévisible</u> (<u>resp optionnelle</u>) <u>nulle</u>. <u>Alors</u> N <u>est évanescent</u>, <u>et donc</u> M <u>est inclus dans</u> H (<u>à un ensemble évanescent près</u>).

<u>D/</u> Nous ne traiterons que le cas prévisible. Supposons que N n'est pas évanescent. Alors, d'après le théorème de section "grossier" , il existe une v.a. L , de graphe inclus dans N , telle que $P\{L<\infty\} > 0$. Considérons la P-mesure m , non nulle, telle que $A_t = 1_{\{L\leq t\}}$ ; on a alors $m(H) = 0$ et $m^p(N) = 0$. Comme m et donc $m^p$ est portée par l'ensemble prévisible M , on en déduit que $m^p$ est portée par H . Mais H est un fermé gauche mesurable, et donc $S^g(m^p)$ est inclus dans H : alors, $S^g(m)$ est aussi inclus dans H puisque l'on a $S^g(m) \subset S^g_p(m) = S^g(m^p)$, d'où une contradiction puisque $m(H) = 0$.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> H <u>un fermé gauche mesurable</u>, <u>et soit</u> Y (<u>resp</u> X) <u>sa projection prévisible</u> (<u>resp optionnelle</u>). <u>Alors</u> $\{Y=1\}$ <u>et</u> $\{X=1\}$ <u>sont contenus dans</u> H .

<u>D/</u> Nous nous contentons de regarder le cas de Y . L'indicatrice de $\{Y=1\} - H$ s'écrit $1_{\{Y=1\}} - 1_{\{Y=1\}} \cdot 1_H$ . Comme Y est prévisible et compris entre 0 et 1 , il est clair que $\{Y=1\} - H$ a une projection prévisible nulle.

REMARQUES.- 1) On voit aisément, à l'aide du théorème de section, que $\{Y=1\}$ (resp $\{X=1\}$) est le plus grand ensemble prévisible (resp optionnel) contenu dans H .

2) Etant donnée l'analogie d'une projection avec une espérance conditionnelle, on pourrait espérer que le résultat vaut pour une plus large classe que celle des fermés gauches. Or, voici un exemple d'ouvert optionnel H tel que $\{Y=1\}$ ne soit pas contenu dans H : prendre pour H le complémentaire du graphe d'un t.d'a. totalement inaccessible non p.s. infini ; la projection prévisible de H est alors tout $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ .

Naturellement, ce qui a été dit pour les fermés gauches vaut pour les fermés. Passons aux fermés droits ; on se limite ici au cas optionnel.

THEOREME 5.- <u>Soit</u> H <u>un fermé droit mesurable et soit</u> M <u>un ensemble optionnel tel que</u> $N = M - H$ <u>ait une projection optionnelle nulle</u>. <u>Alors</u> N <u>est contenu dans un ensemble progressif</u>, <u>de projection optionnelle nulle</u>, <u>égal à la réunion d'une suite de graphes de v.a.</u> .

<u>D/</u> D'abord, d'après le théorème 4 appliqué à $\overline{H}$ , N est inclus dans $\overline{H} - H$ et est donc la réunion d'une suite de graphes de v.a. $(L_n)$. Soit m la P-mesure telle que $A_t = \sum 2^{-n} . 1_{\{L_n \leq t\}}$ : on a $m(H) = 0$ et $m^o(N) = 0$ . Comme $m^o$ est portée par l'ensemble optionnel M , on en déduit que $m^o$ est

portée par H . Mais H est un fermé droit mesurable, et contient donc $S^d(m^o)$. Par ailleurs, on a $N \subset S^d(m) \subset S^d_o(m)$ et donc, finalement, N est contenu dans $(S^d_o(m) - S^d(m^o))$. D'où la conclusion.

COROLLAIRE.- Soit H un fermé droit mesurable, et soit X sa projection optionnelle. Alors $\{X=1\} - H$ est contenu dans un ensemble progressif, de projection optionnelle nulle, égal à la réunion d'une suite de graphes de v.a. .

EXEMPLE.- Montrons, que, en général, on ne peut espérer mieux. Considérons un mouvement brownien $(B_t)$ issu de 0 , la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ étant la filtration naturelle augmentée. Définissons une v.a. L par

$$L(\omega) = \sup\{t \leq 1 : B_t(\omega) = 0\}$$

Il est clair que l'on a $0 < L < 1$ p.s. . Prenons pour H l'intervalle stochastique grossier $[\![0,L[\![$ . Il est bien connu que la projection optionnelle (qui est égale ici à la projection prévisible) de $[\![0,L[\![ \cap \{B_{\cdot} = 0\}$ est égale à $[\![0,1]\!] \cap \{B_{\cdot} = 0\}$ et donc la projection optionnelle de $[\![0,L[\![$ vaut 1 sur le graphe de L .

Nous donnons maintenant une application de ce qui précède aux variables "honnêtes" . Il s'agit, en fait, d'un appendice à l'exposé de Meyer et moi (de ce volume) sur le grossissement des tribus, d'après Yor, auquel je renvoie pour plus de détails.

On se donne une variable honnête L . On sait alors que, si $(\underline{\underline{G}}_t)$ est la plus petite filtration contenant $(\underline{\underline{F}}_t)$ pour laquelle L est un t.d'a., alors une v.a. Z est $\underline{\underline{G}}_t$-mesurable ssi elle s'écrit

(1) $\quad Z = A.1_{\{t<L\}} + B.1_{\{L<t\}}$ où A,B sont des v.a. $\underline{\underline{F}}_t$-mesurables

et qu'elle est $\underline{\underline{G}}_{t-}$-mesurable ssi elle s'écrit

(2) $\quad Z = A.1_{\{t \leq L\}} + B.1_{\{L<t\}}$ où A,B sont des v.a. $\underline{\underline{F}}_{t-}$-mesurables

On se demande alors si les représentations (1),(2) s'étendent aux processus optionnels et prévisibles par rapport à $(\underline{\underline{G}}_t)$, i.e. si un processus X est $(\underline{\underline{G}}_t)$-optionnel ssi il s'écrit

(1') $\quad X = U.1_{[\![0,L[\![} + V.1_{[\![L,\infty[\![}$ où U,V sont $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnels

et est $(\underline{\underline{G}}_t)$-prévisible ssi il s'écrit

(2') $\quad X = U.1_{[\![0,L]\!]} + V.1_{]\!]L,\infty[\![}$ où U,V sont $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisibles

Il est immédiat que tout processus de la forme (2) (resp (2')) est $(\underline{\underline{G}}_t)$-optionnel (resp $(\underline{\underline{G}}_t)$-prévisible). La réciproque pour (2') est établie, élémentairement, dans l'exposé précité. Nous allons la redémontrer "savamment" ici, et montrer aussi que la réciproque de (2) est fausse en général : pour X optionnel par rapport à $(\underline{\underline{G}}_t)$, on aura seulement la représentation avec U optionnel par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$ et V progressif par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$.

Nous notons $(\dots)^o$ (resp $(\dots)^p$) la projection optionnelle (resp prévisible) par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$.

Lemme.- 1) $(1_{[\![0,L]\!]})^p$ (resp $(1_{]\!]L,\infty[\![})^p$) ne s'annule pas sur $[\![0,L]\!]$ (resp sur $]\!]L,\infty[\![$)

2) $(1_{[\![0,L[\![})^o$ (resp $(1_{]\!]L,\infty[\![})^o$) ne s'annule pas sur $[\![0,L[\![$ (resp sur $]\!]L,\infty[\![$) .

d/ Nous nous contentons de regarder le cas optionnel. Il est clair que $(1_{[\![0,L[\![})^o$ (resp $(1_{]\!]L,\infty[\![})^o$) s'annule là où $(1_{[\![L,\infty[\![})^o$ (resp $(1_{[\![0,L]\!]})^o$) est égal à 1 . D'où la conclusion grâce au corollaire du théorème 4 .

THEOREME 6.- a) Un processus X est $(\underline{\underline{G}}_t)$-prévisible ssi on a

$$X = U.1_{[\![0,L]\!]} + V.1_{]\!]L,\infty[\![}$$

où $U = (X.1_{[\![0,L]\!]})^p/(1_{[\![0,L]\!]})^p$ et $V = (X.1_{]\!]L,\infty[\![})^p/(1_{]\!]L,\infty[\![})^p$

b) Un processus X est $(\underline{\underline{G}}_t)$-optionnel ssi on a

$$X = U.1_{[\![0,L[\![} + V.1_{[\![L]\!]} + W.1_{]\!]L,\infty[\![}$$

où $U = (X.1_{[\![0,L[\![})^o/(1_{[\![0,L[\![})^o$ , $W = (X.1_{]\!]L,\infty[\![})^o/(1_{]\!]L,\infty[\![})^o$ et V est un processus progressif par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$.

D/ Nous nous contentons de regarder le cas optionnel. La condition suffisante est immédiate. Pour démontrer la condition nécessaire, il suffit, d'après le théorème des classes monotones, de considérer le cas où X est continu à droite. Alors, d'après le théorème de Mertens, U est continu à droite sur $[\![0,L[\![$ et W est continu à droite sur $]\!]L,\infty[\![$ si bien qu'il suffit de vérifier que, pour chaque t, on a p.s. $X_t.1_{\{t<L\}} = U_t.1_{\{t<L\}}$ et $X_t.1_{\{L<t\}} = W_t.1_{\{L<t\}}$. Or, d'après (1), on sait qu'il existe, pour t fixé, des v.a. A et B, $\underline{\underline{F}}_t$-mesurables, avec

$$X_t = A.1_{\{t<L\}} + B.1_{\{t=L\}} + B.1_{\{L<t\}}$$

En multipliant les deux membres par $1_{\{t<L\}}$ (resp $1_{\{L<t\}}$) et en conditionnant les deux membres par rapport à $\underline{\underline{F}}_t$, on trouve l'égalité voulue. Il nous reste à montrer que, sur $[\![L]\!]$ , X est égal à un processus $(\underline{\underline{F}}_t)$-progressif V. D'abord, il n'y a aucune difficulté sur $\{L=0\}$, tout élément de $\underline{\underline{G}}_0$ étant de la forme $A\cap\{L=0\}$ avec $A\in\underline{\underline{F}}_0$, si bien que l'on peut supposer $L>0$ (en fait, le "canular" progressif-non optionnel ne peut arriver que sur la partie du graphe de L qui est essentiellement disjointe de tout graphe de t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t)$ : cela résulte aisément du corollaire du théorème 5). Pour $\varepsilon>0$, soit $L^\varepsilon = (L-\varepsilon)^+$ : $L^\varepsilon$ est une variable honnête pour la filtration $(\underline{\underline{F}}_t^\varepsilon) = (\underline{\underline{F}}_{t+\varepsilon})$ et $L_\varepsilon = L.1_{\{L>\varepsilon\}}+\infty.1_{\{L\leq\varepsilon\}}$ est un t.d'a. de la filtration $(\underline{\underline{G}}_t^\varepsilon)$ associée à $L^\varepsilon$. Par conséquent, d'après ce qui précède, il existe un processus $(\underline{\underline{F}}_t^\varepsilon)$-optionnel $W^\varepsilon$ tel que $X.1_{]\!]L_\varepsilon,\infty[\![} = W^\varepsilon.1_{]\!]L_\varepsilon,\infty[\![}$ . Alors, $V = \liminf_n W^{1/n}$ est un processus $(\underline{\underline{F}}_t)$-progressif (cf livre rose IV-14) et $X.1_{[\![L]\!]} = V.1_{[\![L]\!]}$ .

Il ne nous reste plus qu'à montrer, par un exemple, qu'on ne peut en général avoir mieux que la représentation b) pour un processus $(\underline{\underline{G}}_t)$-optionnel. L'exemple qui suit a été construit avec l'aide de Emery.

EXEMPLE.- On revient au mouvement brownien $(B_t)$ issu de $0$ , et on note encore $L$ la fin de l'ensemble prévisible $[\![0,1]\!] \cap \{B_{\cdot} = 0\}$ : $L$ est une variable honnête, et on a déjà vu que $(1_{[\![L,\infty[\![})^{o}$ s'annule sur tout $[\![L]\!]$. Désignons par $Z$ la v.a. égale au signe de $B_1$ : comme, pour $t \varepsilon ]L(\omega),1]$, on a $B_t(\omega) = B_1(\omega) \neq 0$ si $\omega$ n'appartient pas à l'ensemble négligeable $\{B_1=0\}$, il est clair que $Z$ est une v.a. $\underline{\underline{G}}_L$-mesurable (on a $\underline{\underline{G}}_{L+} = \underline{\underline{G}}_L$ puisque $(\underline{\underline{G}}_t)$ vérifie les conditions habituelles), et on a évidemment $P(Z=+1) = P(Z=-1) = 1/2$ , $P(Z=0) = 0$. D'autre part, tout processus $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnel est, dans le cas du brownien, $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible, et la tribu $\underline{\underline{F}}_t$ est engendrée par les ensembles négligeables et la tribu $\underline{\underline{F}}^{o}_{t-}$ engendrée par $B_s$ pour $s<t$ (on a oublié de le dire : évidemment, il est sous-entendu qu'on a construit le brownien sur l'espace canonique $\Omega$ des applications continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$). Dans ces conditions, il est bien connu que tout processus $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible est indistinguable d'un processus ("algébriquement")$(\underline{\underline{F}}^{o}_t)$-prévisible (cf le livre rose IV-78 et IV-97). Or, si $(V_t)$ est un processus $(\underline{\underline{F}}^{o}_t)$-prévisible, la valeur de $V_{L(\omega)}(\omega)$ est uniquement déterminée par la restriction de $t \to V_t(\omega)$ à l'intervalle $[0,L(\omega)[$ : il est alors clair qu'on ne peut avoir $Z = V_L$ p.s. , et donc le processus $(\underline{\underline{G}}_t)$-optionnel $Z.1_{[\![L]\!]}$ n'admet pas de "représentation $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnelle".

REMARQUE.- Je voudrais, pour terminer, ramasser en quelques mots la "philosophie du canular", implicite dans la démonstration du théorème 6. Si $Z$ est une v.a. $\geq 0$ , il y a (au moins) deux manières raisonnables d'associer une tribu type "$\underline{\underline{F}}_Z$" à $Z$ : on peut définir la tribu ${}^{o}\underline{\underline{F}}_Z$ par

$$A \varepsilon\, {}^{o}\underline{\underline{F}}_Z \iff \exists X \text{ processus } (\underline{\underline{F}}_t)\text{-optionnel t.q. } 1_A = X_Z \text{ sur } \{Z<\infty\}$$

et la tribu ${}^{\pi}\underline{\underline{F}}_Z$ par

$$A \varepsilon\, {}^{\pi}\underline{\underline{F}}_Z \iff \exists X \text{ processus } (\underline{\underline{F}}_t)\text{-progressif t.q. } 1_A = X_Z \text{ sur } \{Z<\infty\}$$

Bien entendu, ${}^{o}\underline{\underline{F}}_Z$ est une sous-tribu de ${}^{\pi}\underline{\underline{F}}_Z$ , qui coincide avec ${}^{\pi}\underline{\underline{F}}_Z$ lorsque $Z$ est un $(\underline{\underline{F}}_t)$-t.d'a., mais en est distincte en général. Et nous avaons montré que, si $L$ est une variable $(\underline{\underline{F}}_t)$-honnête, alors on a

$$\underline{\underline{G}}_L = {}^{\pi}\underline{\underline{F}}_L \ , \neq {}^{o}\underline{\underline{F}}_L \text{ en général}$$

Par contre, on ne connait qu'une manière raisonnable de définir une tribu type "$\underline{\underline{F}}_{Z-}$" , c'est de définir $\underline{\underline{F}}_{Z-}$ par

$$A \varepsilon\, \underline{\underline{F}}_{Z-} \iff \exists X \text{ processus } (\underline{\underline{F}}_t)\text{-prévisible t.q. } 1_A = X_Z \text{ sur } \{Z<\infty\}$$

et, si $L$ est une variable honnête, on a montré que $\underline{\underline{G}}_{L-} = \underline{\underline{F}}_{L-}$ .