PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur un théorème de J. Jacod

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 57-60

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__57_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

SUR UN THEOREME DE J. JACOD

par P.A. Meyer

<u>1</u>. Considérons un espace mesurable $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o,(\underline{\underline{F}}_t^o))$ filtré par une famille continue à droite, et un processus càdlàg. (X_t) adapté à cette filtration. Jacod a démontré le remarquable théorème suivant : pour abréger, appelons <u>lois de semimartingales</u> les lois P sur Ω pour lesquelles le processus X est une semimartingale par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t^o)$ augmentée de tous les ensembles P-négligeables. Alors

<u>L'ensemble des lois de semimartingales est convexe</u> .

Plus précisément, au moyen d'une technique due à C. Stricker, on peut montrer que cet ensemble est <u>dénombrablement</u> convexe. Voici une application de ce résultat.

Soit P une loi de semimartingale, que nous laisserons fixe dans la suite ; comme nous ne travaillerons que sur des lois absolument continues par rapport à P, nous pouvons supposer que les ensembles P-négligeables ont été adjoints à $\underline{\underline{F}}_0$, et enlever le ^{o} de $\underline{\underline{F}}_t^o$. Considérons une partition dénombrable $\mathcal{P}$ en ensembles $\underline{\underline{F}}$-mesurables A_i . Pour simplifier le langage, nous supposerons que $P(A_i)>0$ pour tout i (cela exclut le cas des partitions finies, mais celui-ci ne pose évidemment aucun problème nouveau !). Nous désignons alors par $\overline{\underline{\underline{F}}}_t$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_t$ et $\mathcal{P}$, et nous avons

THEOREME 1. X <u>est une semimartingale par rapport à la loi</u> P <u>et à la famille</u> $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$.

DEMONSTRATION. Nous abrégerons l'expression en énonçant cela sous la forme " X est une semimartingale $/(P,\overline{\underline{\underline{F}}})$" . Notons Q_i la loi conditionnelle $Q_i(B)=P(A_i\cap B)/P(A_i)$. Alors

X est une semimartingale $/(Q_i,\underline{\underline{F}}$) parce que $Q_i \ll P$ (théorème de Girsanov amélioré par Lenglart).

Donc X est aussi une semimartingale/Q_i par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>augmentée de tous les ensembles</u> Q_i-<u>négligeables.</u> Comme $Q_i(A_j)=0$ ou 1, on voit que

X est une semimartingale $/(Q_i,\overline{\underline{\underline{F}}})$

Mais alors, comme $P=\sum P(A_i).Q_i$, le théorème de Jacod entraîne que X est une semimartingale$/(P,\overline{\underline{\underline{F}}}$).

La signification de ce théorème mérite d'être soulignée : nous sommes en train de mesurer le bouleversement produit, sur un système probabiliste, lorsqu'on va consulter un prophète à l'instant 0 pour savoir lequel des événements A_i va se réaliser. S'il répond "i" , la loi P devra être remplacée par Q_i (à moins que le prophète ne soit jeté dans une citerne!), et à l'instant 0- précédant la consultation, la probabilité de la réponse "i" est $P(A_i)$, de sorte que le système probabiliste tenant compte de la prophétie est $(\Omega, P, (\overline{\underline{\underline{F}}}_t))$.

Un problème voisin, mais plus intéressant peut être, consiste à mesurer le bouleversement produit, sur un système probabiliste, non pas en forçant des connaissances à l'instant 0, mais en les forçant progressivement dans le système. Par exemple, sur un système discret, en remplaçant $\underline{\underline{F}}_0$ par $\overline{\underline{\underline{F}}}_0=\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{F}}_0, A_0)$, $\underline{\underline{F}}_1$ par $\overline{\underline{\underline{F}}}_1=\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{F}}_0, A_0, A_1)$, etc (ce qui revient à décider que la v.a. $\sum n.I_{A_n}$ est un temps d'arrêt de la nouvelle famille). Je ne sais rien pour l'instant sur ce problème.

2. Nous allons maintenant essayer de chiffrer ce bouleversement de manière précise. Pour cela, nous empruntons au travail " sur un théorème de C.Stricker" (Séminaire XI) la définition de la norme $\underline{\underline{H}}^1$ des semimartingales, et quelques unes de ses propriétés. Nous disons qu'une semimartingale X appartient à $\underline{\underline{H}}^1$ si elle peut s'écrire sous la forme M+A, où la martingale M appartient à $\underline{\underline{H}}^1$, et où A est un processus à variation intégrable ; il existe alors une telle décomposition pour laquelle A est prévisible, et nous supposerons ce choix fait. Dans ces conditions nous avons

$$E[\int|dA_s|] = \mathrm{Var}(X)$$

D'autre part, nous avons X=M+A, M=X-A, donc

$$E[\sqrt{[M,M]_\infty}] \leq E[\sqrt{[X,X]_\infty}]+E[\sqrt{[A,A]_\infty}], \quad E[\sqrt{[X,X]_\infty}] \leq E[\sqrt{[M,M]_\infty}]+E[\sqrt{[A,A]_\infty}]$$

et comme $E[\sqrt{[A,A]_\infty}] = E[(\Sigma\ \Delta A_s^2\ )^{1/2}] \leq E[\Sigma|\Delta A_s|] \leq E[\int|dA_s|]$, on comprend pourquoi l'espace $\underline{\underline{H}}^1$ peut être défini par la norme

$$\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1(P)} = E_P[\sqrt{[X,X]_\infty}] + \mathrm{Var}_P(X) \ ^{(1)}$$

La famille de tribus intervient dans la définition de cette norme, non pas dans le premier terme, mais dans le second où interviennent implicitement des conditionnements. C'est pourquoi il faut distinguer soigneusement la norme de X en tant que semimartingale/$(P,(\underline{\underline{F}}_t))$, notée $\|X\|_{H^1(P)}$, et la norme de X en tant que semimartingale/$(P,(\overline{\underline{\underline{F}}}_t))$, qui sera notée par abus de langage $\|X\|_{H^1(\overline{P})}$.

1. Autre norme équivalente : $E_P[X^*]+\mathrm{Var}_P(X)$.

Nous empruntons encore au même travail la remarque suivante : si P est un barycentre $\Sigma\ \lambda_i Q_i$ de lois de semimartingales, nous avons

(*) $\quad \mathrm{Var}_P(X) \leqq \Sigma_i\ \lambda_i \mathrm{Var}_{Q_i}(X)$

En fait, c'est à la "loi $\bar{P}$" , c'est à dire à la loi P sur l'espace filtré $(\Omega,\ (\bar{\underline{\underline{F}}}_t))$, que nous appliquerons cette formule.

Le théorème suivant est vraiment curieux, car c'est la première fois (me semble t'il) que la notion d'entropie apparaît de manière naturelle hors de la théorie ergodique. Malheureusement, c'est un résultat très faible , l'appartenance à $\underline{\underline{BMO}}$ étant une condition par trop restrictive.

THEOREME 2 . Supposons que la partition $\mathcal{P}$ soit d'entropie finie. Alors toute martingale/$(P,(\underline{\underline{F}}_t))$ qui appartient à $\underline{\underline{BMO}}$ appartient à $\underline{\underline{H}}^1$ en tant que semimartingale/$(P,\bar{\underline{\underline{F}}}_t))$.

DEMONSTRATION. Le terme en $E[\sqrt{[X,X]_\infty}\ ]$ ne dépendant pas de la famille de tribus, c'est $\mathrm{Var}_{\bar{P}}(X)$ qu'il faut estimer. Pour cela, nous estimons $\mathrm{Var}_{Q_i}(X)$ - par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ ou $(\bar{\underline{\underline{F}}}_t)$, cela revient au même, puisque les ensembles de la partition ont probabilité 0 ou 1 pour Q_i - et appliquer la formule (*) du haut de la page. Nous omettons temporairement l'indice i en écrivant Q,A au lieu de Q_i, A_i . Soit N la martingale fondamentale donnant la densité de Q par rapport à P, soit

$$N_t = \frac{1}{P(A)}\ P\{A|\underline{\underline{F}}_t\}$$

Par rapport à la loi Q, X admet la décomposition canonique de Girsanov

$$X_t = (\ X_t - \int_0^t \frac{1}{N_{s-}} d\langle X,N\rangle_s\ ) + \int_0^t \frac{1}{N_{s-}} d\langle X,N\rangle_s$$

de sorte que $\mathrm{Var}_Q(X) = E_Q[\int_0^\infty \frac{1}{N_{s-}} |d\langle X,N\rangle_s|] = E_P[\int_0^\infty |d\langle X,N\rangle_s|] \leqq$

$c\,\|X\|_{\underline{\underline{BMO}}}\ \|N\|_{\underline{\underline{H}}^1(P)}$. Il reste à évaluer cette dernière norme.

Pour cela, nous remplaçons N par $H=P\{A|\underline{\underline{F}}_t\}$. Nous appliquons l'inégalité bien connue de Doob

$$E[\ H^*\ ] \leqq 2(\ 1 + E[H_\infty \log^+ H_\infty\ ])$$

non pas à H elle même, mais à tH $(t\geqq 1)$, ce qui nous donne

$$E[\ H^*\ ] \leqq \frac{2}{t}(\ 1 + t\log tP(A))$$

Prenons $t=1/P(A)$, il vient

$$E[H^*] \leqq 2(\ P(A) + P(A)\log \frac{1}{P(A)}\ )$$

Nous avons alors :

$$E[N^*] \leqq 2(1 + \log \frac{1}{P(A)})$$

et pour finir (en changeant de constante c)

$$\mathrm{Var}_{\overline{P}}(X) \leqq c\,\|X\|_{\underline{\underline{BMO}}} \cdot (\Sigma_i \; P(A_i)\log \frac{1}{P(A_i)} + 1)$$