MARC YOR

Grossissement d'une filtration et semi-martingales : théorèmes généraux

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 61-69
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__61_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

GROSSISSEMENT D'UNE FILTRATION ET SEMI-MARTINGALES : THEOREMES GENERAUX

par Marc Yor

1. Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet, $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ une filtration croissante de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$, vérifiant les conditions habituelles, et soit $L : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une variable $\underline{\underline{F}}$-mesurable (1).

Récemment, P.A. Meyer a posé la question suivante : si l'on grossit (convenablement) la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$, de façon que L devienne un temps d'arrêt pour la nouvelle filtration $(\underline{\underline{G}}_t)$, est ce que toute semi-martingale X par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, est encore une semi-martingale pour $(\underline{\underline{G}}_t)$?

Il suffit évidemment de traiter le cas où X est une martingale pour $(\underline{\underline{F}}_t)$. D'autre part, le problème se décompose en deux, relatifs aux processus $X_t I_{\{t<L\}}$ et $X_t I_{\{t\geq L\}}$. Nous montrerons que pour le premier processus la réponse est toujours affirmative, tandis que pour le second il nous faut faire une hypothèse, par ailleurs tout à fait naturelle : L est supposée être la fin d'un ensemble optionnel.

Connaissant ces résultats, une autre question est de se demander, (X_t) étant une $(\underline{\underline{F}}_t)$ semi-martingale spéciale (par exemple, une $(\underline{\underline{F}}_t)$ martingale locale), quelle est la décomposition canonique de (X_t), considérée maintenant comme $(\underline{\underline{G}}_t)$ semi-martingale spéciale ? Ce second aspect de la question a été traité, sous des hypothèses un peu plus restrictives, par M. Barlow [5].

2. Un grossissement de la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$, "raisonnable" pour l'étude du processus $X_t I_{\{t<L\}}$, est fait explicitement en [1] : on note $\underline{\underline{G}}_\infty$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_\infty$ et L, et pour $t\in\mathbb{R}_+$, on pose

$$\underline{\underline{G}}_t = \{ A\in\underline{\underline{G}}_\infty \mid \exists\, A_t \in \underline{\underline{F}}_t \text{ , } A\cap\{t<L\} = A_t\cap\{t<L\} \}$$

Remarquons que
- pour tout t, $\underline{\underline{F}}_t \subset \underline{\underline{G}}_t$
- $(\underline{\underline{G}}_t)$ satisfait aux conditions habituelles
- L est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{G}}_t)$.

De plus, en rapprochant, dans l'article [1], le lemme 1 (p. 187) de son corollaire (p. 188), on obtient aisément que si T est un $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt (et donc un $(\underline{\underline{G}}_t)$-temps d'arrêt), on a

$$(1) \quad \underline{\underline{G}}_T = \{ A\in\underline{\underline{G}}_\infty \mid \exists\, A_T \in \underline{\underline{F}}_T \text{ , } A\cap\{t<L\} = A_T\cap\{T<L\} \}$$

(1) Il faudrait prendre L à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$; nous avons exclu les valeurs 0 et $+\infty$ pour simplifier la discussion.

3. Dans tout ce travail, la surmartingale càdlàg Z_t (pour $(\underline{\underline{F}}_t)$) qui est $(\underline{\underline{F}}_t)$ projection optionnelle de $1_{\{L>t\}}$ joue un rôle fondamental. Si l'on note $R=\inf\{t \mid Z_t=0\}$, on a $P\{L>R|\underline{\underline{F}}_R\}1_{\{R<\infty\}} = Z_R I_{\{R<\infty\}} = 0$, d'où l'on déduit que $L\leqq R$ p.s. - mais on peut avoir avec probabilité positive $L=R<\infty$, autrement dit $Z_L=0$, comme le montre le cas où L est un temps d'arrêt. On a cependant en toute généralité

<u>Lemme 0</u> : $P\{Z_{L-}>0\} = 1$.

<u>Démonstration</u> : Considérons le processus 1^Z défini par

$$(1^Z)_t = \frac{1}{Z_t} 1_{\{t<L\}} .$$

On déduit aisément de l'expression explicite de la filtration $(\underline{\underline{G}}_t)$ que 1^Z est une $(\underline{\underline{G}}_t)$-surmartingale. Elle est continue à droite par construction. D'autre part, elle est intégrable, car on a

$$E[(1^Z)_t] = E[\frac{1_{\{Z_t\neq 0\}}}{Z_t} 1_{\{t<L\}}] = P\{Z_t\neq 0\} < \infty$$

Donc, elle admet presque sûrement des limites à gauche finies en tout $t\in\mathbb{R}_+$, et en particulier en L, d'où le lemme.

Il est intéressant de rappeler ([1], par exemple) que l'on a $Z_{L-}=1$ si, et seulement si, L est la fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible.

Nous répondons maintenant à la première question posée :

<u>Théorème 1</u> : <u>Si</u> X <u>est une semi-martingale relative à</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>alors les processus</u> $X_t I_{\{t<L\}}$ <u>et</u> $X_{t\wedge L}$ <u>sont des semi-martingales relatives à</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$.

<u>Démonstration</u> :

- Il suffit de se restreindre à étudier $X_t I_{\{t<L\}}$, car $X_{t\wedge L} = X_t I_{\{t<L\}} + X_L I_{\{L\leqq t\}}$.

- On peut encore se restreindre à prendre pour X une $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingale uniformément intégrable ; celle-ci étant différence de deux martingales uniformément intégrables positives, on peut se ramener au cas où X est positive.

- D'autre part, si X est une surmartingale positive (en particulier, une martingale positive) relative à $(\underline{\underline{F}}_t)$, le processus

$$(X^Z)_t = \frac{X_t}{Z_t} I_{\{t<L\}}$$

est une $(\underline{\underline{G}}_t)$-surmartingale positive (c'est aussi simple que pour 1^Z). De plus, d'après le lemme 0, X^Z est càdlàg sur tout $\mathbb{R}_+$; ainsi X^Z est une $(\underline{\underline{G}}_t)$-semi-martingale.

- Pour montrer que X elle même est une $(\underline{\underline{G}}_t)$-semi-martingale, nous remarquons que XZ est une semi-martingale spéciale pour $(\underline{\underline{F}}_t)$, car $(XZ)^* \leqq X^*$, et X^* est localement intégrable ; soit alors $XZ=M+A$ sa décomposition canonique pour $(\underline{\underline{F}}_t)$ ($M\in\underline{\underline{M}}_{loc}$, $A\in\underline{\underline{V}}_p$) . Ecrivons

$$X_t I_{\{t<L\}} = \frac{X_t Z_t}{Z_t} I_{\{t<L\}} = \frac{M_t+A_t}{Z_t} I_{\{t<L\}} = M_t^Z + A_t^Z$$

D'après ce qui précède, M^Z est une $(\underline{\underline{G}}_t)$-semi-martingale. Quant à A^Z, c'est le produit des deux $(\underline{\underline{G}}_t)$-semi-martingales A et 1^Z, et c'est donc encore une $(\underline{\underline{G}}_t)$-semi-martingale.

Nota-Bene : La méthode utilisée est très étroitement inspirée de [2] .

4. Nous allons maintenant donner (entre autres choses) une seconde démonstration du théorème 1.

On a déjà remarqué précédemment qu'il suffisait de démontrer ce théorème en se restreignant aux $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingales uniformément intégrables X. Or, une martingale (locale) est la somme d'une martingale localement de carré intégrable, et d'une martingale à variation localement intégrable ([3], pages 294-295). Par localisation, il suffit donc de démontrer le théorème 1 pour X, $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingale de carré intégrable.

En fait, on a le résultat plus fort suivant (dont nous ne nous servirons pas immédiatement) :

<u>Proposition</u> : <u>Soient</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>et</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$ <u>deux filtrations vérifiant les conditions habituelles, telles que l'on ait</u> $\underline{\underline{F}}_t \subset \underline{\underline{G}}_t$ <u>pour tout</u> t. <u>Alors les assertions suivantes sont équivalentes</u>

1) <u>Toute</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>semi-martingale est une</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$-<u>semi-martingale</u>.
2) <u>Toute</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>martingale locale est une</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$-<u>semi-martingale</u>.
3) <u>Toute</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>martingale bornée est une</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$-<u>semi-martingale</u>.

<u>Démonstration</u> : Il est évident que 1)<=>2)=>3). Il reste à montrer que 3)=>2) , et il suffit évidemment de prouver que toute $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingale M appartenant à $\underline{\underline{H}}^1$ est une $(\underline{\underline{G}}_t)$-semi-martingale. Nous pouvons supposer que $M_0=0$. Posons $T_n= \inf\{t \mid |M_t| \geq n \}$; le saut ΔM_{T_n} étant intégrable, nous pouvons considérer le processus à variation intégrable $A_t=\Delta M_{T_n} I_{\{t\geq T_n\}}$, sa projection duale prévisible $\tilde{A}_t$, et écrire

$$M_t^{T_n} = Z_t^n + (A_t-\tilde{A}_t) \qquad ;$$

$A_t-\tilde{A}_t$ est un processus à variation intégrable $(\underline{\underline{F}}_t)$-adapté, donc $(\underline{\underline{G}}_t)$-adapté, c'est donc une $(\underline{\underline{G}}_t)$-semi-martingale. D'autre part, (Z_t^n) est une $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingale majorée par $|M_t^{T_n}-A_t|+|\tilde{A}_t| \leq n+|\tilde{A}_t|$; $\tilde{A}$ étant prévisible, est localement borné, donc Z^n est une martingale localement bornée (pour $(\underline{\underline{F}}_t)$), donc une $(\underline{\underline{G}}_t)$-semi-martingale d'après 3). Donc M^{T_n} est une $(\underline{\underline{G}}_t)$-semi-martingale, et lorsque n tend vers $+\infty$ on a le même résultat pour M.

<u>Remarque</u> : Le raisonnement précédent a une portée un peu plus générale :

Z^n est l'intégrale stochastique optionnelle $I_{[0,T_n[}\cdot M$. En oubliant la filtration $(\underline{\underline{G}}_t)$, nous avons montré qu'il existe, pour toute $M\in\underline{\underline{H}}^1$ nulle en 0 (et cette dernière hypothèse est d'ailleurs sans importance) des temps d'arrêt $T_n\uparrow +\infty$ tels que $I_{[0,T_n[}\cdot M$ soit localement bornée. Dans [3], p.294-295, un résultat un peu plus précis est établi : pour toute martingale locale M, il existe des $T_n\uparrow+\infty$ tels que $I_{[0,T_n[}\cdot M$ appartienne à $\underline{\underline{BMO}}$. L'intégrale stochastique optionnelle joue donc un peu, pour les martingales càdlàg, le rôle de l'arrêt pour les martingales continues.

Revenons à notre problème. Voici le renforcement annoncé du théorème 1.

<u>Théorème 2</u> : <u>Si</u> X <u>est une martingale de carré intégrable relative à</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>les processus</u> $Y_t= X_tI_{\{t<L\}}$ <u>et</u> $\overline{Y}_t=X_{t\wedge L}$ <u>sont des quasi-martingales relatives à</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$. <u>Plus précisément, la variation moyenne</u> V(Y) <u>de</u> Y <u>par rapport à</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$ <u>satisfait à</u>

$$V(Y) \leqq 8\|X_\infty\|_2 \tag{2}$$

<u>Démonstration</u> : La variation moyenne V(Y) que nous considérons ici est définie comme

$$V(Y) = \sup_\tau \Sigma_{i=0}^{n-1} \ E[\ |E[Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i}|\underline{\underline{G}}_{t_i}]|\ ]$$

τ parcourant l'ensemble des subdivisions $\tau=(t_i)$, $0=t_0<t_1<\ldots<t_n<+\infty$ de $\mathbb{R}_+$. Cette variation est plus petite que celle considérée par Stricker dans [6], qui en diffère par l'addition, dans chaque somme, du terme $E[|Y_{t_n}|]$; mais comme on a $E[|Y_{t_n}|]\leqq E[|X_{t_n}|]\leqq E[|X_\infty|]\leqq\|X_\infty\|_2$, on déduit de (2) une majoration analogue pour la variation moyenne de Stricker.

D'autre part, l'étude de $\overline{Y}$ se ramène immédiatement à celle de Y, car $\overline{Y}$-Y est le processus à variation finie $A_t=X_LI_{\{t\geqq L\}}$, et l'on a $E[\int_0^\infty |dA_s|]$ $\leqq E[X^*] \leqq \|X^*\|_2 \leqq 2\|X_\infty\|_2$.

Pour montrer (2), il nous suffit de montrer que pour toute subdivision τ comme ci-dessus, et toute famille de variables a^i $(i=0,\ldots,n-1)$ bornées par 1 et telles que a^i soit $\underline{\underline{G}}_{t_i}$-mesurable pour tout i, on a $E[S] \leqq 8\|X_\infty\|_2$, où

$$S = \Sigma_{i=0}^{n-1} \ a^i(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})$$

Soit a_i une variable $\underline{\underline{F}}_{t_i}$-mesurable bornée par 1, égale à a^i sur $\{t_i<L\}$; comme $Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i}$ est nulle sur $\{t_i\geqq L\}$, on a aussi

$$S=\Sigma_{i=0}^{n-1} a_i(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i}) = \Sigma_i \ a_i(X_{t_{i+1}} 1_{\{t_{i+1}<L\}}-X_{t_i} 1_{\{t_i<L\}})$$

et par conséquent

$$E[S] = \Sigma_i \; E[a_i(X_{t_{i+1}} Z_{t_{i+1}} - X_{t_i} Z_{t_i})]$$

Nous partageons cette espérance en trois, dont la dernière est nulle du fait que X est une martingale :

$$\begin{aligned} E[S] &= \Sigma_i \; E[a_i(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})] \\ &+ \Sigma_i \; E[a_i X_{t_i}(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})] \\ &+ \Sigma_i \; E[a_i(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) Z_{t_i}] \; = E_1 + E_2 + E_3 \end{aligned}$$

Pour étudier E_2 , on considère la décomposition additive $Z=M-A$ de la surmartingale Z en un processus croissant prévisible A et la martingale $M_t = E[A_\infty | \underline{\underline{F}}_t]$ (Z est un potentiel du fait que $L<\infty$ p.s.). Z étant bornée par 1, on sait que $E[A_\infty^2] \leqq 2$[1]. Comme M est une martingale on a

$$\begin{aligned} E_2 = E[\; \Sigma_i \; a_i X_{t_i}(A_{t_{i+1}} - A_{t_i})] &\leqq E[(\sup_t |X_t|) A_\infty] \\ &\leqq 2\|X_\infty\|_2 \|A_\infty\|_2 \; . \end{aligned}$$

Pour étudier E_1 , nous la majorons d'après l'inégalité de Schwarz

$$E_1 \leqq (E[\Sigma_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2])^{1/2} (E[\Sigma_i (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})^2])^{1/2}$$

Le premier facteur vaut $\|X_\infty\|_2$. Dans le second, nous majorons $(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})^2$ par $2\,[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})^2]$, puis $\Sigma_i (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})^2$ par A_∞^2. Le second facteur est donc majoré par

$$(2E[M_\infty^2 + A_\infty^2])^{1/2} = (4E[A_\infty^2])^{1/2} = 2\|A_\infty\|_2$$

Regroupant avec le calcul de E_1, il nous reste

$$E[S] \leqq 4\|X_\infty\|_2 \|A_\infty\|_2 \leqq 8\|X_\infty\|_2 \quad .$$

<u>Remarque</u>. La famille $(\underline{\underline{G}}_t)$ n'est pas la plus petite famille de tribus $(\underline{\underline{H}}_t)$ contenant $(\underline{\underline{F}}_t)$, satisfaisant aux conditions habituelles, et telle que L soit un temps d'arrêt pour $(\underline{\underline{H}}_t)$. Cependant, le théorème 2 est vrai pour la famille $(\underline{\underline{H}}_t)$ aussi, car le remplacement de $(\underline{\underline{G}}_t)$ par $(\underline{\underline{H}}_t)$ ne fait que diminuer $V(Y)$. On en déduit que le théorème 1 est vrai pour $(\underline{\underline{H}}_t)$.

Même si nous n'avions pas établi le théorème 2, la validité du théorème 1 pour $(\underline{\underline{H}}_t)$ résulterait du théorème général de Stricker [6] (dont la démonstration utilise d'ailleurs les quasi-martingales, et le même argument que ci-dessus sur la variation).

<u>Remarque</u> . La démonstration donne un peu mieux qu'une inégalité : la variation moyenne $V(Y)$ pour $(\underline{\underline{G}}_t)$ est <u>égale</u> à la variation $V(XZ)$ pour $(\underline{\underline{F}}_t)$.

1. Voir par ex. Meyer, Probabilités et potentiel, VII.T24.

5. Afin d'aborder la seconde question posée dans le paragraphe 1, concernant le processus $X_t I_{\{L \leq t\}}$, nous voudrions définir une famille de tribus se comportant vis à vis de $(\underline{\underline{F}}_t)$, après L, de la même manière que $(\underline{\underline{G}}_t)$ ci-dessus avant L. Il est naturel d'essayer :

$$\underline{\underline{G}}_t^! = \{ A \in \underline{\underline{G}}_\infty \mid \exists A_t^! \in \underline{\underline{F}}_t \ , \ A \cap \{L \leq t\} = A_t^! \cap \{L \leq t\} \ \} .$$

Considérons aussi les tribus utilisées par M. Barlow [5] pour obtenir les formules explicites auxquelles on a fait allusion au paragraphe 1 :

$$\underline{\underline{H}}_t = \{ A \in \underline{\underline{G}}_\infty \mid \exists A_t, A_t^! \in \underline{\underline{F}}_t \ , \ A = (A_t \cap \{t < L\}) + (A_t^! \cap \{L \leq t\}) \ \}$$

On a $\underline{\underline{H}}_t = \underline{\underline{G}}_t \cap \underline{\underline{G}}_t^!$. Si L est une variable quelconque, les familles $(\underline{\underline{G}}_t^!)$ et $(\underline{\underline{H}}_t)$ ne sont pas nécessairement croissantes en t ; en ce qui concerne $(\underline{\underline{H}}_t)$, les quatre propriétés suivantes sont équivalentes

(a) <u>La famille de tribus</u> $(\underline{\underline{H}}_t)$ <u>est croissante en</u> t.

(b) <u>Pour tous</u> $s<t$, <u>il existe un ensemble</u> $F_{st} \in \underline{\underline{F}}_t$ <u>tel que</u> $\{L \leq s\} = F_{st} \cap \{L \leq t\}$.

(c) <u>Pour tout</u> $t \geq 0$, L <u>est égale sur</u> $\{L<t\}$ <u>à une variable</u> $\underline{\underline{F}}_t$<u>-mesurable</u>.

(d) L <u>est la fin d'un ensemble optionnel</u> H (i.e. $L(\omega) = \sup\{s \mid (s,\omega) \in H\}$)

Il est immédiat que (a)<=>(b)<=>(c) ; l'équivalence entre (c) et (d) est annoncée, et en partie établie, dans [4], où les variables L satisfaisant à (c) sont appelées <u>temps honnêtes</u>.

Il est facile de voir que si la famille $(\underline{\underline{G}}_t^!)$ est croissante, L est un temps honnête, mais la réciproque ne semble pas vraie. Nous nous intéresserons donc uniquement à $(\underline{\underline{H}}_t)$.

6. On suppose désormais que L est un temps honnête. Remarquons que $(\underline{\underline{H}}_t)$ contient $(\underline{\underline{F}}_t)$, fait de L un temps d'arrêt, et que $(\underline{\underline{H}}_t)$ satisfait aux conditions habituelles. On peut énoncer le :

<u>Théorème 4</u> : 1) <u>Toute semi-martingale par rapport à</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>est encore une semi-martingale par rapport à</u> $(\underline{\underline{H}}_t)$.

2) <u>Si</u> X <u>est une martingale de carré intégrable relative à</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>les processus</u> $Y_t = X_t I_{\{t<L\}}$, $\overline{Y}_t = X_{t\wedge L}$, $W_t = X_t I_{\{t \geq L\}}$, $X_t = Y_t + W_t$ <u>sont des quasi-martingales par rapport à</u> $(\underline{\underline{H}}_t)$. <u>Plus précisément</u>, <u>la variation moyenne</u> V(Y), V(W) <u>par rapport à</u> $(\underline{\underline{H}}_t)$ <u>satisfait à</u>

(3) $\quad V(Y) \leq 8\|X\|_2 \quad , \ V(W) \leq 8\|X\|_2 + 2\|\sup_s |X_s|\,\|_1$.

<u>Démonstration</u> : L'inégalité relative à Y est déjà connue (voir le théorème 2 et la remarque qui le suit) ; nous allons démontrer l'inégalité (3) relative à W, qui entraînera par addition que X est une quasi-martingale relativement à $(\underline{\underline{H}}_t)$. Après quoi on déduira 1) par la proposition précédant le théorème 2.

Nous reprenons les notations du théorème 2 : la subdivision $\tau=(t_i)$, les variables a^i bornées par 1, telles que a^i soit $\underline{\underline{H}}_{t_i}$-mesurable pour tout i, la somme

$$S = \Sigma_{i=0}^{n-1} a^i(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})$$

et les variables a_i bornées par 1 , telles que pour tout i a_i soit $\underline{\underline{F}}_{t_i}$-mesurable et que $a_i=a^i$ sur $\{t_i\geqq L\}$. Nous décomposons S en S^1+S^2 où

$$S^1= \Sigma_{i=0}^{n-1} a_i(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})$$

$$S^2= \Sigma_{i=0}^{n-1} (a^i-a_i)(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})$$

$E[S^1]$ se calcule exactement comme dans le théorème 2 : récrivons le rapidement

$$E[S^1]= E[\Sigma\, a_i(X_{t_{i+1}}1_{\{t_{i+1}\geqq L\}}-X_{t_i}1_{\{t_i\geqq L\}})]$$

$$= E[\Sigma\, a_i(X_{t_{i+1}}(1-Z_{t_{i+1}})-X_{t_i}(1-Z_{t_i}))]$$

$$= E[\Sigma\, a_i(X_{t_i}Z_{t_i}-X_{t_{i+1}}Z_{t_{i+1}})]$$

que l'on majore par la variation moyenne de XZ relativement à $(\underline{\underline{F}}_t)$, comme dans le théorème 2. D'autre part

$$E[S^2] = E[\Sigma\, (a^i-a_i)X_{t_{i+1}}1_{\{t_i<L\leqq t_{i+1}\}}]$$

On majore en valeur absolue a^i-a_i par 2, $X_{t_{i+1}}$ par $X^*= \sup_s|X_s|$, et il vient que $|E[S^2]|\leqq 2E[X^*]$.

<u>Remarque</u> : Le calcul précédent n'a pas utilisé le fait que L était honnête. Si L n'est pas honnête, on a donc tout de même majoré la "variation moyenne" de X par rapport à la famille de tribus <u>non croissante</u> $(\underline{\underline{H}}_t)$.

7. <u>Remarque finale</u>. En [7], P.A. Meyer a montré le résultat suivant :

Soit $(\underline{\underline{F}}_t)$ une filtration vérifiant les conditions habituelles, et soit $\rho=(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une partition de Ω en ensembles $\underline{\underline{F}}_\infty$-mesurables. On note $\overline{\underline{\underline{F}}}_t$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_t$ et ρ ($(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$ est une filtration vérifiant les conditions habituelles). Alors pour toute $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingale M appartenant à BMO, la variation moyenne de M par rapport à $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$ est finie, et

$$V(M) \leqq c\|M\|_{BMO}\,(1+\Sigma_i\, P(A_i)\log\frac{1}{P(A_i)})\ .$$

La démonstration de [7] repose sur le théorème de Girsanov. Il est naturel de se demander si notre méthode de majoration (assez rudimentaire) utilisant les filtrations discrètes permet de retrouver ce résultat de manière élémentaire. Nous verrons que ce n'est pas le cas, mais qu'on n'en est pas trop loin tout de même, et que cet exemple illustre bien la supériorité de la méthode "continue" sur la méthode "discrète".

Il nous faut majorer, pour toute subdivision $\tau=(t_i)$, l'espérance

$$I = E[\ \Sigma_i \Sigma_{j\in\mathbb{N}}\ a^j_{t_i} 1_{A_j}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})]$$

où les variables $a^j_{t_i}$ sont $\underline{\underline{F}}_{t_i}$-mesurables et bornées par 1 en valeur absolue. Introduisant la martingale $Z^j_t=E[1_{A_j}|\underline{\underline{F}}_t]$, nous pouvons écrire

$$I = E[\ \Sigma_{i,j}\ a^j_{t_i}(Z^j_{t_{i+1}}-Z^j_{t_i})(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})]$$

et par conséquent

$$|I| \leqq \Sigma_j\ E[\Sigma_i\ |(Z^j_{t_{i+1}}-Z^j_{t_i})(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})|]$$
$$\leqq c\Sigma_j\ \|Z^j\|_{H^1}\|M\|_{BMO} \qquad (c=\sqrt{2}\ )$$

d'après l'inégalité de Fefferman discrète, les normes étant relatives à la filtration discrète $(\underline{\underline{F}}_{t_i})$. Mais s'il est facile, en suivant Meyer [7], de majorer $\Sigma_j \|Z^j\|_{H^1}$ à partir de $(1+\Sigma_i P(A_i)\log\frac{1}{P(A_i)})$ - c'est l'inégalité de Doob pour p=1 - nous ne savons pas majorer la norme BMO discrète à partir de la norme BMO continue : la condition quadratique reste satisfaite, mais la condition que les sauts soient bornés n'est pas nécessairement vérifiée après discrétisation. On ne sait donc conclure que lorsque M est bornée, en vertu de l'inégalité $\|M\|_{BMO} \leqq 2\|M\|_{L^\infty}$. L'article suivant, de Dellacherie et Meyer, permet de remplacer tous les arguments de discrétisation présentés dans cet article-ci par des arguments "continus" donnant de meilleures inégalités, mais il utilise le caractère local de l'intégrale stochastique, c'est à dire en fin de compte le théorème de Girsanov.

Références

[1] P.A. Meyer : Résultats d'Azéma en théorie générale des processus. Séminaire de Probabilités VII, L.Notes in M. 321, Springer 1973.

[2] E. Lenglart : Transformation des martingales locales par changement absolument continu de probabilités. Z. fur Wahr. 39, 65-70 (1977).

[3] P.A. Meyer : Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X, L. Notes in M. 511, Springer 1976.

[4] P.A. Meyer, R. Smythe, J. Walsh : Birth and death of Markov processes. Proceedings of the 6-th Berkeley Symposium, vol.3, 1972.

[5] M. Barlow : Martingale representation with respect to expanded σ-fields. A paraître.

[6] <u>C. Stricker</u> : Quasi-martingales, martingales locales et filtrations naturelles. Zeitschrift fur Wahr. 39, 55-63 (1977).

[7] <u>P.A. Meyer</u> : Sur un théorème de Jacod
(dans ce volume)

Marc Yor
Laboratoire de Probabilités
Tour 46, 3e étage
2 Place Jussieu
75230 Paris Cedex 05