

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

## **Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 12 (1978), p. 757-762

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1978\\_\\_12\\_\\_757\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__757_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INEGALITES DE NORMES POUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES

par P.A. Meyer

Cette note est inspirée par un travail d'Emery sur les équations différentielles stochastiques, dans lequel l'inégalité

$$\|X_{-} \cdot M\|_{\underline{\underline{S}}^p} \leq c_p \|X\|_{\underline{\underline{S}}^p} \|M\|_{\underline{\underline{H}}^\infty} \quad (1 \leq p < \infty)$$

qui est un cas particulier de l'inégalité (8) ci-dessous, joue un rôle fondamental. Le but de la note est la recherche systématique d'inégalités de ce genre. On y montre que l'espace  $\underline{\underline{H}}^\infty$  (analogue à  $L^\infty$ ) peut y être remplacé par un espace un peu plus gros (analogue à  $\underline{\underline{BMO}}$ ) que nous noterons  $\underline{\underline{H}}^\omega$  à défaut de meilleure notation<sup>1</sup>; on y étend les inégalités aux intégrales optionnelles, et on y donne enfin d'amusantes (et faciles) variantes de l'inégalité de Fefferman.

DEFINITIONS : NORMES  $\underline{\underline{S}}^p$  ET  $\underline{\underline{H}}^p$

Nous considérons un espace  $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P, (\underline{\underline{F}}_t))$  satisfaisant aux conditions habituelles. Soit  $X$  un processus optionnel; nous supposons  $X$  défini pour  $t \in \mathbb{R}$ , constant pour  $t < 0$  (la v.a.  $X_t = X_{0-}$  pour  $t < 0$  étant  $\underline{\underline{F}}_0$ -mesurable) et nous poserons comme d'habitude

$$(1) \quad X_{t-}^* = \sup_{s < t} |X_s|, \quad X_t^* = \lim_{s \downarrow t} X_s^*, \quad X^* = X_\infty^* = X_{\infty-}^*$$

et nous désignerons<sup>2</sup> par  $\|X\|_{\underline{\underline{S}}^p}$  la norme  $\|X^*\|_{L^p}$ ,  $\underline{\underline{S}}^p$  lui-même étant pour  $1 \leq p \leq \infty$  l'espace des processus  $X$  tels que  $\|X\|_{\underline{\underline{S}}^p} < \infty$ .

Si  $A$  est un processus à variation finie (pouvant présenter un saut en 0; on convient que  $A_{0-} = 0$ ), nous poserons<sup>3</sup> pour  $1 \leq p \leq \infty$

$$(2) \quad \|A\|_{\underline{\underline{V}}^p} = \left\| \int_{0-}^{\infty} |dA_s| \right\|_{L^p}$$

et nous définirons  $\|A\|_{\underline{\underline{V}}^\omega}$  comme la plus petite constante  $c_{\leq \infty}$  telle que

1.  $\omega$  était la notation de Cantor pour le "premier nombre après l'infini" d'où la notation classique  $\underline{\underline{C}}^\omega$  pour l'espace des fonctions analytiques. Ici la notation est moins satisfaisante, car on a  $\underline{\underline{C}}^\omega \subset \underline{\underline{C}}^\infty$ , mais  $\underline{\underline{H}}^\omega \supset \underline{\underline{H}}^\infty$ .

2.  $\underline{\underline{S}}$  signifie "sup".

3.  $\underline{\underline{V}}$  signifie "variation".

$$(3) \quad \forall T \text{ t.a. } E\left[\int_{T-}^{\infty} |dA_s| \mid \mathbb{F}_{T-}\right] \leq c \text{ p.s.}$$

Il est clair que la norme  $\underline{\underline{V}}^p$  est plus forte que la norme  $\underline{\underline{S}}^p$  pour  $1 \leq p < \infty$ .

Un théorème célèbre de Burkholder-Davis et Gundy affirme que si  $\tilde{A}$  est la compensatrice ( projection duale ) prévisible de  $A$ , on a

$$(4) \quad \|\tilde{A}\|_{\underline{\underline{V}}^p} \leq c_p \|A\|_{\underline{\underline{V}}^p} \quad (1 \leq p < \infty, \text{ faux pour } p = \infty, \text{ vrai pour } p = \omega)$$

( séminaire X, p. 347, n° 25 a ). Ici, comme dans toute la suite,  $c_p$  désigne une constante qui dépend de  $p$  seulement, mais peut varier de place en place.

Rappelons la définition des espaces  $\underline{\underline{H}}^p$  de martingales. Si  $N$  est une martingale, on a coutume de poser

$$(5) \quad \|N\|_{\underline{\underline{H}}^p} = \|[N, N]_{\infty}^{1/2}\|_{L^p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

$\underline{\underline{H}}^p$  étant l'espace des martingales ( locales )  $N$  telles que  $\|N\|_{\underline{\underline{H}}^p} < \infty$ .

Il est bien connu ( Burkholder, Davis et Gundy ) que pour  $1 \leq p < \infty$  les normes  $\underline{\underline{H}}^p$  et  $\underline{\underline{S}}^p$  sont équivalentes pour les martingales. Nous désignerons par  $\|N\|_{\underline{\underline{H}}^{\omega}}$  la plus petite constante  $c \leq +\infty$  telle que

$$(6) \quad \forall T \text{ t.a. } E\left([\![N, N]\!]_{\infty} - [N, N]_{T-}\right)^{1/2} \mid \mathbb{F}_{T-} \leq c \text{ p.s.}$$

Cette définition peut paraître bizarre : on montre en effet sans peine ( cf. séminaire IX, p. 218-220 ) que la norme  $\underline{\underline{H}}^{\omega}$  est équivalente à la norme  $\underline{\underline{BMO}}$ . Mais avec la définition (6) nous ferons un petit bénéfice tout à l'heure.

DEFINITION. Soit  $M$  une semimartingale admettant une décomposition  $M=N+A$  ( $N$  martingale locale,  $A$  à variation finie ). Pour  $1 \leq p < \infty$ , posons

$$j_p(N, A) = \|[N, N]_{\infty}^{1/2} + \int_{0-}^{\infty} |dA_s| \|_{L^p}$$

et pour  $p = \omega$ , soit  $j_{\omega}(N, A)$  la plus petite constante  $c$  telle que

$$\forall T \text{ t.a. } E\left([\![N, N]\!]_{\infty} - [N, N]_{T-}\right)^{1/2} + \int_{T-}^{\infty} |dA_s| \mid \mathbb{F}_{T-} \leq c \text{ p.s.}$$

Nous poserons alors

$$(7) \quad \|M\|_{\underline{\underline{H}}^p} = \inf_{M=N+A} j_p(N, A) \quad (1 \leq p < \infty \text{ ou } p = \omega).$$

On dit que  $M$  appartient à  $\underline{\underline{H}}^p$  si  $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^p} < \infty$ . La notation employée semble incohérente : en effet, soit  $M$  une martingale, et soit  $m$  sa norme  $\underline{\underline{H}}^p$  en tant que martingale (5) ; elle est égale à  $j_p(M, 0)$ , et la norme  $\underline{\underline{H}}^p$  de  $M$  en tant que semimartingale, que nous noterons  $m'$ , est a priori plus petite que  $m$ . Heureusement, il n'en est rien. Si  $M=N+A$  est une

décomposition de  $M$ , on a

$$[M, M]_{\infty}^{1/2} \leq [N, N]_{\infty}^{1/2} + [A, A]_{\infty}^{1/2} \leq [N, N]_{\infty}^{1/2} + \int_{0-}^{\infty} |dA_s|$$

et en prenant la norme dans  $L^p$  on voit que  $m \leq j_p(N, A)$ . De même pour  $p = \infty$  en écrivant l'inégalité analogue pour  $([M, M]_{T-}^{\infty})^{1/2}$ . C'est la raison de la bizarre définition (6) !

Plus généralement, toute martingale appartenant à  $\underline{H}^p$  admet une décomposition canonique  $M = \bar{N} + \bar{A}$  ( $\bar{N}$  martingale locale,  $\bar{A}$  prévisible nul en 0). On a  $j_p(\bar{N}, \bar{A}) \geq \|M\|_{\underline{H}^p}$ . Inversement, si  $M = N + A$  est une décomposition de  $M$ , on a

$$\bar{A} = \tilde{A} - A_0, \quad \bar{N} = N + A_0 + \overset{C}{A} \quad (\overset{C}{A} = A - \tilde{A})$$

Donc d'après (6), en exceptant le cas  $p = +\infty$ ,  $\|\bar{A}\|_{V^p} \leq c_p \|A\|_{V^p} \leq c_p j_p(N, A)$  puis (comme  $[\overset{C}{A}, \overset{C}{A}]_s^t \leq \int_s^t |d\overset{C}{A}_s| \leq \int_s^t (|dA_s| + |d\tilde{A}_s|)$ )  $\|\bar{N}\|_{\underline{H}^p} \leq c_p j_p(N, A)$ , et finalement  $j_p(\bar{N}, \bar{A}) \leq c_p j_p(N, A)$ . Finalement, on obtient une norme équivalente en considérant la norme  $j_p(\bar{N}, \bar{A})$  pour la seule décomposition canonique, à condition d'excepter  $\underline{H}^{\infty}$  (qui joue le rôle principal dans le travail d'Emery ...).

Noter que la norme  $\underline{H}^p$  est plus forte que la norme  $\underline{S}^p$ , pour  $1 \leq p < \infty$ .

#### LES INEGALITES : PREMIERE ETAPE

L'inégalité suivante figure dans le travail d'Emery. Elle est très utile malgré son caractère élémentaire.

LEMME 1. Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ , et si  $X$  est prévisible, on a

$$(8) \quad \|X \cdot M\|_{\underline{H}^r} \leq \|X\|_{\underline{S}^p} \|M\|_{\underline{H}^q}$$

et par conséquent, si  $r < \infty$

$$(8') \quad \|X \cdot M\|_{\underline{S}^r} \leq c_r \|X\|_{\underline{S}^p} \|M\|_{\underline{H}^q}$$

DEMONSTRATION. (8') résulte aussitôt de (8), la norme  $\underline{S}^r$  étant moins forte que la norme  $\underline{H}^r$ , sauf pour  $r = \infty$ .

Soit  $m > \|M\|_{\underline{H}^q}$  et soit  $M = N + A$  une décomposition telle que  $j_p(N, A) \leq m$ .

Alors  $X \cdot M$  admet la décomposition  $X \cdot N + X \cdot A$ , et on a

$$\left( \int_{0-}^{\infty} X_s^2 d[N, N]_s \right)^{1/2} + \int_{0-}^{\infty} |X_s dA_s| \leq X^* \left( [N, N]_{\infty}^{1/2} + \int_{0-}^{\infty} |dA_s| \right)$$

Après quoi on applique Hölder ( $\|UV\|_{L^r} \leq \|U\|_{L^p} \|V\|_{L^q}$ ).

REMARQUE. Dans quel cas peut on donner un sens à (8) pour X optionnel ? Nous pouvons toujours interpréter  $X \cdot A$  comme intégrale de Stieltjes,  $X \cdot N$  comme intégrale optionnelle, mais la somme  $X \cdot N + X \cdot A$  dépend de la décomposition choisie, et ne peut être notée  $X \cdot M$ . Cette réserve étant faite, nous avons d'après Pratelli ( séminaire X, p.352, n°38 ) si  $r < \infty$

$$\|X \cdot N\|_{\underline{\underline{H}}^r} \leq c_r \left\| \int_0^\infty X_s^2 d[N, N]_s \right\|_{L^r}^{1/2} \leq c_r \|X^*[N, N]_\infty^{1/2}\|_{L^r} \leq c_r \|X\|_{\underline{\underline{S}}^p} \|N\|_{\underline{\underline{H}}^q}$$

La majoration pour  $X \cdot A$  marche sans modification. D'où finalement

$$(9) \quad j_r(X \cdot N, X \cdot A) \leq c_r \|X\|_{\underline{\underline{S}}^p} j_q(N, A) \quad (1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty, r < \infty)$$

Il y a un cas où l'on peut donner un sens raisonnable à  $X \cdot M$ , c'est celui où la famille  $(\underline{\underline{F}}_t)$  est quasi-continue à gauche. On définit alors  $X \cdot M = X \cdot \bar{N} + X \cdot \bar{A}$  relativement à la décomposition canonique  $M = \bar{N} + \bar{A}$  de  $M$ . Dans ce cas on a une formule analogue à (8) pour X optionnel et  $r < \infty$ , avec une constante  $c_r$  au second membre.

#### LES INEGALITES : SECONDE ETAPE

Nous arrivons à la partie essentielle de cette note : que se passe t'il dans (8) pour  $q = \omega$  ? La réponse est simple.

THEOREME 1. On a pour  $1 \leq p < \infty$ , si X est prévisible

$$(11) \quad \|X \cdot M\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leq c_p \|X\|_{\underline{\underline{S}}^p} \|M\|_{\underline{\underline{H}}^\omega}$$

REMARQUE. Si X est optionnel, et M admet la décomposition  $N+A$ , on a de même

$$(11') \quad j_p(X \cdot N, X \cdot A) \leq c_p \|X\|_{\underline{\underline{S}}^p} j_\omega(N, A)$$

Pour la démonstration, nous décomposons M en  $N+A$ , où N appartient à  $\underline{\underline{BMO}}$  et A à  $\underline{\underline{V}}^\omega$ , et nous étudions séparément  $X \cdot$  et  $X \cdot$ . Pour étudier le premier processus, il nous faut un calcul :

LEMME 2. On a pour tout t.a. T ( que X soit prévisible ou non )

$$(12) \quad E \left[ \int_{T-}^\infty |X_s| |dA_s| \middle| \underline{\underline{F}}_T \right] \leq \|A\|_{\underline{\underline{V}}^\omega} E[X_\infty^* \middle| \underline{\underline{F}}_T]$$

COROLLAIRE. On a pour  $1 \leq p < \infty$

$$(13) \quad \|X \cdot A\|_{\underline{\underline{V}}^p} \leq c_p \|X\|_{\underline{\underline{S}}^p} \|A\|_{\underline{\underline{V}}^\omega} .$$

DEMONSTRATION. Lorsque  $p=1$ , le corollaire se déduit de (12) en prenant  $T=0$  et en intégrant. Lorsque  $p>1$ , il résulte de (12) et du lemme de Garcia ( séminaire IX p. 216, lemme 2 et sa variante ). Démontrons (12) en posant  $B_t = \int_{0-}^t |dA_s|$ ,  $m = \|A\|_{\underline{\underline{V}}^\omega}$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
E\left[ \int_{T-}^{\infty} |X_{S-} dA_S| \Big| \underline{F}_{\underline{T}} \right] &\leq E\left[ \int_{T-}^{\infty} X_S^* dB_S \Big| \underline{F}_{\underline{T}} \right] \\
&= E\left[ \int_{T-}^{\infty} (B_{\infty} - B_{S-}) dX_S^* + X_{T-}^* (B_{\infty} - B_{T-}) \Big| \underline{F}_{\underline{T}} \right] \\
&\leq mE\left[ (X_{\infty}^* - X_{T-}^*) + X_{T-}^* \Big| \underline{F}_{\underline{T}} \right] = mE\left[ X_{\infty}^* \Big| \underline{F}_{\underline{T}} \right]
\end{aligned}$$

Pour passer de l'avant dernière ligne à la dernière, on utilise le fait que le processus croissant  $(X_t^*)$  est optionnel, ce qui permet de remplacer le processus  $(B_{\infty} - B_{S-})$  par sa projection optionnelle, bornée par  $m$ .

Nous passons aux martingales. Soit  $N$  appartenant à  $\underline{H}^{\omega} = \underline{BMO}$ . Notre problème consiste à établir que

$$(14) \quad \|X \cdot N\|_{\underline{H}^p} \leq c_p \|X\|_{\underline{S}^p} \|N\|_{\underline{BMO}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

après quoi le théorème 1 résulte du rapprochement de (13) et (14). On peut se borner à établir (14) lorsque  $X$  est borné.

Soit  $p'$  l'exposant conjugué de  $p$  si  $1 < p < \infty$ , et  $p' = \omega$  si  $p = 1$ . La martingale  $X \cdot N$  appartient à  $\underline{BMO} \subset \underline{H}^p$ , et nous avons donc

$$\|X \cdot N\|_{\underline{H}^p} \leq c_p \sup_L E\left[ \int_{0-}^{\infty} d[X \cdot N, L]_S \right]$$

L parcourant la boule unité de  $\underline{H}^{p'}$ . Pour finir, il nous suffit de prouver que

$$(15) \quad \text{si } \|N\|_{\underline{BMO}} \leq 1, \|L\|_{\underline{H}^{p'}} \leq 1, \quad E\left[ \int_{0-}^{\infty} d[X \cdot N, L]_S \right] \leq c_p \|X\|_{\underline{S}^p}$$

pour tout processus borné  $X$ . Nous distinguons maintenant deux cas :

a)  $1 < p < \infty$ . Nous écrivons cette espérance  $E[\int d[N, X \cdot L]_S]$ . D'après le lemme 1, nous avons

$$(16) \quad \|X \cdot L\|_{\underline{H}^1} \leq c \|X\|_{\underline{S}^p} \|L\|_{\underline{H}^{p'}} \leq c \|X\|_{\underline{S}^p}$$

et (15) se réduit à l'inégalité de Fefferman, puisque  $\|N\|_{\underline{BMO}} \leq 1$ .

b) Si  $p = 1$ , nous écrivons l'espérance (15) sous la forme

$$E\left[ \int_{0-}^{\infty} X_S d[L, N]_S \right], \text{ et nous remarquons que}$$

$$(17) \quad |d[L, N]_S| \leq \frac{1}{2} (d[L, L]_S + d[N, N]_S)$$

engendre un potentiel gauche borné. Puis nous appliquons (13) pour  $p = 1$ .

Compte tenu de (9), cette démonstration s'applique aussi bien au cas où  $X$  est optionnel.

L'inégalité (11) est probablement le résultat de théorie des martingales qui ressemble le plus aux inégalités de Calderon-Zygmund.

## SUR L'INEGALITE DE FEFFERMAN

L'énoncé suivant étend dans deux directions l'inégalité de Fefferman ( sans être plus profond ! c'en est une conséquence facile ) : remplacement des martingales par des semimartingales, remplacement de  $\underline{H}^1$  par  $\underline{H}^p$

THEOREME 2. Soient U et V deux semimartingales. On a pour  $1 \leq p < \infty$

$$(17) \quad \|[U, V]\|_{\underline{V}^p} = \left\| \int_{0-}^{\infty} |d[U, V]_s| \right\|_{L^p} \leq c_p \|U\|_{\underline{H}^p} \|V\|_{\underline{H}^\omega}$$

DEMONSTRATION. Nous écrivons  $U=M+A$ ,  $V=N+B$ , où A et B sont prévisibles.

$$1) \left\| \int_{0-}^{\infty} |d[U, B]_s| \right\|_{L^p} = \left\| \sum_s |\Delta U_s \Delta B_s| \right\|_{L^p} = \|\Delta U \cdot B\|_{\underline{V}^p} \leq c_p \|\Delta U\|_{\underline{S}^p} \|B\|_{\underline{V}^\omega} \quad (13)$$

$$\leq c_p \|U\|_{\underline{H}^p} \|V\|_{\underline{H}^\omega} .$$

$$2) \left\| \int_{0-}^{\infty} |d[A, N]_s| \right\|_p = \left\| \sum_s |\Delta A_s \Delta N_s| \right\|_{L^p} \leq c \|N\|_{\underline{BMO}} \left\| \sum_s |\Delta A_s| \right\|_{L^p}$$

car N a des sauts bornés par  $c \|N\|_{\underline{BMO}}$

$$\leq c \|N\|_{\underline{BMO}} \|A\|_{\underline{V}^p} \leq c_p \|U\|_{\underline{H}^p} \|V\|_{\underline{H}^\omega} .$$

3) Reste le cas le plus important, la majoration de  $\int |d[M, N]_s|$ . Il s'agit de démontrer que pour toute v.a.  $Z \in L^{p'}$  ( où  $p'$  est l'exposant conjugué de  $p$ , qui est  $>1$  puisque  $p < \infty$ , et qui peut être supposé fini, le cas  $p=1$  étant l'inégalité de Fefferman usuelle ) on a

$$E \left[ Z \int_{0-}^{\infty} |d[M, N]_s| \right] \leq c_p \|Z\|_{L^{p'}} \|M\|_{\underline{H}^p} \|N\|_{\underline{BMO}} \quad (\text{il suffit de traiter le cas où } Z \text{ est borné})$$

Soit  $(H_t)$  un processus optionnel à valeurs dans  $[-1, 1]$ , densité de  $|d[M, N]_s|$  par rapport à  $d[M, N]_s$  ; le côté gauche s'écrit

$$E \left[ Z \int_{0-}^{\infty} H_s d[M, N]_s \right] = E \left[ \int_{0-}^{\infty} X_s d[M, N]_s \right] = E \left[ \int_{0-}^{\infty} d[X \cdot M, N]_s \right]$$

où  $(X_s)$  est le processus  $H_s E[Z | \underline{F}_s]$ . Il n'y a aucune difficulté quant à l'existence de ces diverses intégrales, puisque la v.a. Z et le processus X sont bornés. Nous avons d'après (9)

$$\|X \cdot M\|_{\underline{H}^1} \leq c_p \|X\|_{\underline{S}^p} \|M\|_{\underline{H}^p} \leq c_p \|Z\|_{L^{p'}} \|M\|_{\underline{H}^p}$$

d'après l'inégalité de Doob, puisque  $p' > 1$ . Et finalement, nous majorons  $E[\int d[X \cdot M, N]_s]$  par l'inégalité de Fefferman ordinaire. Le théorème est établi.

REMARQUE. (17) vaut aussi pour  $p=\omega$ . D'après l'inégalité  $2|d[U, V]| \leq d[U, U] + d[V, V]$ , il suffit de montrer que  $[U, U]$  engendre un potentiel gauche borné. On écrit  $U=M+A$ ,  $[U, U] \leq 2([M, M] + [A, A])$ , avec  $M \in \underline{BMO}$ , et  $A \in \underline{V}^\omega$ . Puis  $E[[A, A]_{T-}^{\infty} | \underline{F}_T] \leq E[\int_{T-}^{\infty} |dA_s|^2 | \underline{F}_T] \leq 2c^2$  si le potentiel de  $\int |dA|$  est  $\leq c$ .