SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

La formule d'Ito pour le mouvement brownien, d'après G. Brosamler

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 763-769

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__763_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

LA FORMULE D'ITO POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN D'APRES G. BROSAMLER

par P.A.Meyer

Soit (X_t) le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$, et soit f une fonction deux fois continûment différentiable. Nous avons alors la formule d'Ito

$$(1) \qquad f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \operatorname{grad} f(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(X_s)ds$$

que l'on peut généraliser dans deux directions : soit en l'étendant à des classes plus larges de processus, f restant de classe C^2, soit en restant sur le mouvement brownien, mais en affaiblissant les hypothèses de différentiabilité sur f. Une extension du second type, d'une grande importance, est la formule de Tanaka : lorsque n=1, c'est la formule d'Ito pour $f(x)=|x|$, qui n'est pas de classe C^2

$$|X_t| = |X_0| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)dX_s + L_t$$

où le processus à variation finie (L_t) n'est plus absolument continu (c'est un "temps local" du point 0). Il faut noter que la fonction f est de classe C^2 dans le complémentaire du fermé de mesure nulle $\{0\}$, et que sa dérivée seconde au sens des distributions est une mesure.

Il est donc tout naturel de se poser le même problème dans $\mathbb{R}^n$: étant donné un ouvert $\underline{\underline{O}}$, une fonction f dans $\underline{\underline{O}}$ de classe C^2 dans le complémentaire d'un fermé de mesure nulle (dans $\underline{\underline{O}}$), et dont le laplacien (dans $\underline{\underline{O}}$, au sens des distributions) est une mesure, peut on établir une formule de Tanaka pour f (c'est à dire, une formule d'Ito dont le dernier terme seul doit être réinterprété) ? Ce problème vient d'être résolu[1] dans un travail récent de Getoor et Sharpe, très ingénieux et intéressant, que je me proposais d'exposer à ce séminaire. Mais, après avoir tenté d'en affaiblir encore les hypothèses, je me suis rappelé que N.V. Krylov (pour des fonctions f appartenant à des espaces de Sobolev) et G. Brosamler avaient indiqué autrefois des généralisations de la formule d'Ito... et j'ai découvert que le travail de Brosamler [1, 1970] contenait en fait <u>tout</u> ce que l'on pouvait espérer démontrer en 1977. Or ce travail remarquable n'est jamais cité - sans doute parce qu'il a été publié dans un journal que les probabilistes ne lisent pas - c'est pourquoi il semble utile de le présenter ici, bien qu'il date de sept ans.

1. En fait, les conditions de Getoor et Sharpe sont un peu plus larges.

Voici l'énoncé du théorème de Brosamler :

THEOREME. Soit $\underline{\underline{O}}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit (X_t) le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$, soit ζ le temps de rencontre du complémentaire de $\underline{\underline{O}}$.

Soit f une fonction localement sommable dans $\underline{\underline{O}}$, dont le laplacien au sens des distributions est une mesure :

(2) $$\frac{1}{2}\Delta f = \mu$$

Quitte à modifier f sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer f définie, finie et finement continue hors d'un ensemble polaire $N\subset\underline{\underline{O}}$. Les dérivées au sens des distributions de f sont des fonctions localement sommables dans $\underline{\underline{O}}$

(3) $$D^i f = j^i \quad , \ i=1,2,\ldots n$$

et l'on a $\int_0^t j^{i2}\circ X_s ds < \infty$ p.s. pour $t<\zeta$. Si la loi initiale est portée par $\underline{\underline{O}}$ et ne charge pas N , on a pour $t<\zeta$

(4) $$f(X_t) = f(X_0) + \Sigma_1^n \int_0^t j^i(X_s)dX_s^i + A_t$$

où (A_t) est un processus adapté défini sur $[0,\zeta[$, dont les trajectoires sont nulles en 0, continues et localement à variation bornée sur $[0,\zeta[$, et qui sera décrit en détail plus loin (c'est la "fonctionnelle associée à μ") . En particulier, si $\frac{1}{2}\Delta f$ est une fonction localement sommable dans $\underline{\underline{O}}$, on a

(5) $$\int_0^t |\Delta f\circ X_s|ds < \infty \ \text{p.s.} \ (t<\zeta) \ \text{et} \ A_t = \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(X_s)ds.$$

Le reste de l'exposé sera consacré à la démonstration de ce théorème. Les méthodes ne sont pas celles de Brosamler : elles sont plus probabilistes, et utilisent moins de théorie du potentiel. Le lecteur trouvera certainement profit et plaisir à se reporter à l'article original.

Nous commençons par définir le processus (A_t) qui apparaît dans la formule (4), car cela n'exige que très peu de matériel. Puis nous reviendrons à la démonstration proprement dite.

LA FONCTIONNELLE ASSOCIEE A UNE MESURE σ-FINIE

Commençons par rappeler un résultat classique de théorie probabiliste du potentiel, pour lequel nous renvoyons par exemple à Blumenthal-Getoor, théorème VI.3.1, p.279

Soit μ une mesure positive dont le potentiel Newtonien $U\mu$ est borné[1] (c'est alors un potentiel de la classe (D) au sens probabiliste du terme), et soit (A_t) la fonctionnelle additive continue telle que $U\mu=E^{\cdot}[A_\infty]$

1. Nous supposons $n\geq 3$. Pour n=2 ou 1 il faudrait localiser, ce qui entraînerait de petites difficultés techniques.

<u>Alors on a pour toute fonction borélienne positive</u> j

(6) $$U(j\mu) = E^{\bullet}[\int_0^{\infty} j(X_s)dA_s\ ] .$$ (1)

Ce théorème peut aussi se déduire de la théorie des noyaux excessifs d'Azéma [3], ou de celle des mesures de Revuz [4]. Il est valable en fait sous des hypothèses de dualité très faibles.

Au lieu de porter notre attention sur la fonctionnelle additive (A_t), nous la porterons sur la mesure aléatoire homogène dA_t , et nous écrirons $\mu \Longleftrightarrow dA$. Nous nous proposons d'étendre cette correspondance à des mesures σ-finies quelconques.

Soit donc μ positive σ-finie. Nous la décomposons en μ_0 , portée par en ensemble polaire, et λ , ne chargeant pas les ensembles polaires, et nous convenons que

$$\mu_0 \Longleftrightarrow dA^0 = 0$$

C'est en fait λ qui nous intéresse. Nous la décomposons en $\Sigma_n \lambda_n$, où les λ_n sont positives, bornées et à support compact, et nous posons $U\lambda_n = f_n$. Puis nous posons

$$\lambda_{nk} = \lambda_n . I_{\{k \leqq f_n < k+1\}} \qquad (\lambda_n = \Sigma_k \lambda_{nk} \text{ , car } \lambda_n \text{ ne charge pas } \{f_n = +\infty\}).$$

D'après le principe classique du maximum, on a $U\lambda_{nk} \leqq k+1$, et il existe donc une fonctionnelle additive continue (A_t^{nk}) telle que $\lambda_{nk} \Longleftrightarrow dA^{nk}$. Et nous convenons que la mesure aléatoire homogène dA associée à λ (et à μ) est égale à $\Sigma_{nk}\ dA^{nk}$. Cette mesure aléatoire dépend a priori de la décomposition choisie, et peut être extrêmement grande : en particulier on peut avoir $A_t = \int_0^t dA_s = +\infty$ identiquement, de sorte que la fonctionnelle additive (A_t) ne **caractérise plus dA** .

Cependant, la propriété (6) est encore vraie après sommation : si j est borélienne positive , $U(j\lambda) = E^{\bullet}[\int_0^{\infty} j(X_s)dA_s\ ]$, et cela entraîne <u>l'unicité</u> de dA, et le fait que $dA_{\bullet}(\omega)$ <u>est une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}_+$</u> pour presque tout ω . En effet, il existe j partout >0 telle que $U(j\lambda)$ soit une fonction excessive bornée, et alors si $j\lambda \Longleftrightarrow dB$ (B est unique) on a $dA_s = \frac{1}{j(X_s)}\ dB_s$.

Puisque dA est σ-finie, nous pouvons procéder par différence, et étendre la correspondance entre mesures σ-finies et mesures aléatoires homogènes aux mesures de signe quelconque.

Revenons alors à l'énoncé du théorème : μ étant une mesure de Radon sur $\underline{\underline{O}}$ est une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}^n$, donc il existe une mesure aléatoire homogène $dA \Longleftrightarrow \mu$. Nous verrons dans un instant que $\int_0^t |dA_s| < \infty$ pour $t < \zeta$.

1. Noter aussi que si $\mu(dx) = \varphi(x)dx$, alors $A_t = \int_0^t \varphi(X_s)ds$.

PASSAGE DU LOCAL AU GLOBAL

Conformément à une méthode bien connue, nous allons ramener notre problème local à un problème global, plus facile à résoudre.

Soit V un ouvert relativement compact tel que $\overline{V} \subset \underline{\underline{O}}$, et soit ζ_V le temps de rencontre du complémentaire de V . Pour notre sécurité, soit encore W un ouvert relativement compact tel que $\overline{V}\subset W$, $\overline{W}\subset \underline{\underline{O}}$. Posons

$$\overline{\mu} = I_W\mu \quad , \quad k^+ = U(\overline{\mu}^+) \ , \ k^-=U(\overline{\mu}^-)$$

Comme μ est une mesure de Radon dans $\underline{\underline{O}}$, $\overline{\mu}^+,\overline{\mu}^-$ sont des mesures de Radon à support compact dans $\mathbb{R}^n$, et k^+,k^- sont des fonctions surharmoniques finies hors d'un ensemble polaire $N(W)$ (dépendant de W) et finement continues. La fonction $k=k^+-k^-$ est donc définie hors de $N(W)$, et finement continue hors de $N(W)$.

Au sens des distributions nous avons $\frac{1}{2}\Delta k = -\mu$, donc $\Delta(f+k)=0$ dans W. Il est bien connu qu'une fonction harmonique au sens des distributions est égale p.p. à une fonction harmonique ordinaire : il existe donc h harmonique dans W telle que $f=h-k$ p.p. dans W.

Soit ℓ une fonction indéfiniment dérivable à support compact dans $\mathbb{R}^n$, nulle hors de W, telle que $h=\ell$ dans V . Posons $\overline{f} = \ell-k$. Que pouvons nous dire de $\overline{f}$?

<u>Elle est définie hors de l'ensemble polaire</u> $N(W)$, <u>et finement continue dans</u> $\mathbb{R}^n\backslash N(W)$; <u>Elle est égale à</u> f <u>p.p. dans</u> V

$\frac{1}{2}\Delta\overline{f} = \overline{\mu}$ <u>est une mesure à support compact</u> (<u>bornée</u>) <u>dans</u> $\mathbb{R}^n$.

Supposons le résultat établi pour $\overline{f}$, dans $\mathbb{R}^n$ tout entier : si la loi initiale ne charge pas $N(W)$

$$\overline{f}(X_t) = \overline{f}(X_0) + \Sigma_1^n \int_0^t D^i\overline{f}\circ X_s dX_s^i + \overline{A}_t \qquad (t<\infty)$$

Nous avons dans V $D^if=D^i\overline{f}$ p.p. ; d'autre part, $\overline{\mu}I_V=\mu I_V$, donc ces deux mesures ont même mesure aléatoire associée, ce qui signifie que $I_V\circ X_s dA_s = I_V\circ X_s d\overline{A}_s$ (et en particulier $\int_0^t I_V(X_s)|dA_s| < \infty$ p.s.). <u>Donc la formule</u> (4) <u>est vraie pour</u> $t<\zeta_V$, car alors $I_V\circ X_s = 1$ pour $s\leq t$.

Pour conclure, il ne nous reste plus qu'à représenter $\underline{\underline{O}}$ comme une réunion croissante d'ouverts V_n du type précédent, à construire des W_n associés (il n'est pas nécessaire que W_n croisse avec n), et à poser $N = \bigcup_n N(W_n)$.

RESOLUTION DU PROBLEME GLOBAL : PREMIERE ETAPE

Nous enlevons les $^-$ et revenons aux notations initiales ; seulement $\underline{\underline{O}}$ est maintenant $\mathbb{R}^n$ tout entier, et $\mu= \frac{1}{2}\Delta f$ est à support compact. Nous avons alors $f = U\mu^+ - U\mu^- + h$ p.p., où h est une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^n$. La formule d'Ito étant bien connue pour les fonctions harmoniques (qui sont de classe C^2), il nous suffit d'établir le théorème pour $U\mu^+$ et $U\mu^-$. Autrement dit , en changeant de notations

Désormais $f=U\lambda$, où λ est une mesure positive à support compact

(Attention : $\frac{1}{2}\Delta f = -\lambda$, de sorte que A_t est la fonctionnelle associée à $-\lambda$. En particulier, si f est un potentiel de fonction positive $U\varphi$, $A_t = -\int_0^t \varphi(X_s)ds$).

Voici le premier vrai résultat :

LEMME 1. Si la loi initiale ne charge pas $N=\{f=+\infty\}$, le processus $M_t = f\circ X_t - f\circ X_0 + A_t$ est une martingale locale .

DEMONSTRATION. Nous traitons séparément les deux cas où λ ne charge pas les polaires, et où λ est portée par un ensemble polaire ; le cas général s'en déduit par addition.

1) Soit $\lambda_n = \lambda . I_{\{n\leq f<n+1\}}$ et soit $f_n = U\lambda_n$, $\lambda_n \longleftrightarrow A^n$. Comme λ ne charge pas l'ensemble polaire $\{f=+\infty\}$, on a $\lambda = \Sigma_n \lambda_n$, $f = \Sigma_n f_n$, et f_n est bornée par n+1 d'après le principe du maximum . Le processus $f_n \circ X_t + A^n_t$ est une martingale uniformément intégrable pour toute mesure P^x. Par addition, il en est de même de $f\circ X_t + A_t$ si $f(x)<\infty$, et alors ce processus est une martingale locale pour toute mesure P^α, où la loi initiale α ne charge pas $\{f=+\infty\}$.

2) Décomposons λ en une somme $\Sigma_n \lambda_n$, où chaque mesure λ_n est portée par un compact polaire K_n , et soit $f_n = U\lambda_n$. Soit aussi x tel que $f(x)<\infty$. La fonction f_n étant harmonique dans K_n^c , il résulte de la formule d'Ito classique que $(f_n \circ X_t)$ est une martingale locale pour P^x. D'autre part $(f\circ X_t)$ est une surmartingale positive pour P^x ; si l'on pose $T_k = \inf\{t : f\circ X_t > k\}$, le processus arrêté $(f\circ X_{t\wedge T_k})$ est borné[1] par k, donc chaque processus arrêté $(f_n \circ X_{t\wedge T_k})$ est une martingale locale bornée par k, donc une vraie martingale uniformément intégrable. Par sommation sur n on voit que $(f\circ X_{t\wedge T_k})$ est une martingale uniformément intégrable. Après quoi on fait tendre k vers $+\infty$, et il ne reste plus qu'à intégrer en $\alpha(dx)$.

Ce résultat étant acquis, nous appliquons un théorème marteau-pilon: toute martingale locale des tribus browniennes, nulle en 0, est une intégrale stochastique $\Sigma_1^n \int_0^t j_s^i dX_s^i$, où les (j_t^i) sont des processus prévisibles

1. Pas tout à fait : si $f(x)>k$ il est constant et égal à $f(x)$, donc la vraie borne est $k\vee f(x)$.

tels que $\int_0^t j_s^{i2}\,ds < +\infty$ p.s. - ce n'est pas un théorème difficile, d'ailleurs : pour une martingale de carré intégrable c'est un corollaire facile des théorèmes généraux de Kunita-Watanabe, et la localisation est sans difficulté, puisque toutes les martingales locales sont continues. Un regard sur la formule (4) nous montre qu'<u>il ne nous reste plus qu'à montrer que</u> $j_s^i = D^i f\circ X_s$ (p.s. , presque partout sur $\mathbb{R}_+$). On a

(7) $$\int_0^t j_s^i ds = \langle M, N^i\rangle_t$$

où $N_t^i = X_t^i - X_0^i$.

DIGRESSION. Il existe probablement des fonctions f , définies et finement continues hors d'un ensemble polaire N, telles que le processus $(f\circ X_t)$ soit une semimartingale pour toute loi P^x ($x\notin N$)[1], et ne possédant l'intégrabilité locale au voisinage d'aucun point. Toute semimartingale continue étant spéciale, il existe alors un processus (continu) à variation finie A_t tel que $f\circ X_t - f\circ X_0 + A_t = M_t$ soit une martingale locale (pour toute loi P^x, $x\notin N$), et le raisonnement précédent entraîne encore l'existence de processus (j_t^i) comme ci-dessus. On peut montrer mieux : que (A_t), donc aussi (M_t) et $(\langle M,N^i\rangle)_t$, est une fonctionnelle additive, et donc (théorème de Motoo) que j_s^i est de la forme $j^i\circ X_s$, où j^i est une fonction sur $\mathbb{R}^n$ définie p.p.. Les méthodes probabilistes permettent donc de dire quelque chose sur de telles fonctions f , alors que les méthodes analytiques semblent - pour l'instant - tout à fait impuissantes. On ne sait pas faire de théorie des distributions sur les ouverts fins, semble t'il ! Les j^i sont les composantes du "gradient fin" de f.

SECONDE ETAPE : IDENTIFICATION DES PROCESSUS (j_t^i)

Nous avons besoin à présent d'un résultat d'analyse :

LEMME 2. <u>Si</u> $f=U\lambda$ (λ à support compact), $D^i f$ <u>est une fonction localement sommable</u>.

DEMONSTRATION. Nous avons $f=h*\lambda$, où $h(x)=c|x|^{2-n}$ est le noyau newtonien. Or $D^i h(x) = c(2-n)x_i/|x|^{-n}$ est une fonction localement sommable, dérivée de h au sens des distributions. Et alors $D^i f = D^i h*\lambda$ est une fonction localement sommable.

COROLLAIRE. <u>Soit</u> $g(x)=x^i f(x)$. <u>Alors</u> $\frac{1}{2}\Delta g = -x^i\lambda + D^i f$ <u>est une mesure</u>.

COROLLAIRE. <u>Soit</u> $C_t = g\circ X_t - g\circ X_0 + \int_0^t X_s^i dA_s - \int_0^t D^i f\circ X_s ds$. <u>Alors</u> (C_t) <u>est une martingale locale</u>.

1. Nous ne savons pas si cette hypothèse entraîne, lorsque f est localement sommable, que Δf est une mesure. Cela semble probable.

DEMONSTRATION. Le premier corollaire est la formule $\Delta(x^iT)=x^i\Delta T+2D^iT$, valable pour toute distribution T, compte tenu du fait que $\Delta f=-2\lambda$. Pour le second, posons $\frac{1}{2}\Delta g=-\theta$, et soit (B_t) la fonctionnelle associée à θ ; le lemme 1 nous dit que $g\circ X_t - g\circ X_0 + B_t$ est une martingale locale. Or $\theta = x^i\lambda - D^i f$ et $\lambda \Longleftrightarrow dA_t$, donc (cf. la première section) $j\lambda \Longleftrightarrow j(X_t)dA_t$, et en particulier $x^i\lambda \Longleftrightarrow X^i_s dA_s$. ▯

Nous avons tout ce qu'il faut pour conclure :

$$M_t = f\circ X_t - f\circ X_0 + A_t \quad \text{est une martingale locale continue}$$
$$N^i_t = X^i_t - X^i_0 \quad \text{est une martingale locale continue}$$

écrivons : $f\circ X_t = f\circ X_0 + M_t - A_t$

$$X^i_t = N^i_t + X_0$$

et intégrons par parties :

$$X^i_t f\circ X_t = \int_{0+}^t X^i_s\, df\circ X_s + \int_{0+}^t f\circ X_s\, dX^i_s + \langle f\circ X, X^i\rangle_t$$

au second membre, le premier terme vaut $\int_0^t -X^i_s dA_s$ + martingale locale nulle en 0 .
Le second est une martingale locale nulle en 0. Le dernier vaut $f\circ X_0 X^i_0 + \langle M,N^i\rangle_t$, car $\langle A,N^i\rangle = 0$. Ainsi

$$g\circ X_t = g\circ X_0 + \langle M,N^i\rangle_t - \int_0^t f\circ X_s dA_s + \text{martingale locale nulle en } 0$$

Comparons au corollaire précédent : (B_t comme dans la démonstration)

$$g\circ X_t = g\circ X_0 - B_t + \text{martingale locale nulle en } 0$$
$$= g\circ X_0 + \int_0^t D^i f\circ X_s ds - \int_0^t f\circ X_s dA_s + \text{mart. loc. nulle en } 0$$

et l'unicité de la décomposition canonique d'une semimartingale continue nous dit que

$$\langle M, N^i\rangle_t = \int_0^t D^i f\circ X_s ds$$

Compte tenu de (7), c'est le résultat cherché.

REFERENCES

G.A. BROSAMLER. Quadratic variation of potentials and harmonic functions Transactions A.M.S. 149, 1970, p.243-257.

R.M. BLUMENTHAL et R.K. GETOOR. Markov processes and potential theory. Academic Press, New York 1968.

J.AZEMA . Noyau potentiel associé à une fonction excessive. Ann. Inst. Fourier, 19, 1969, 495-526 (cf. exemple 3.4, b)).

D. REVUZ. Mesures associées aux fonctionnelles additives I. Transactions A.M.S. 148, 1970, p.501-531.