PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur le lemme de La Vallée Poussin et un théorème de Bismut

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 770-774
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__770_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

SUR LE LEMME DE LA VALLEE POUSSIN ET UN THEOREME DE BISMUT

par P.A. Meyer

Nous appelons <u>fonction de Young</u> toute fonction convexe croissante F sur $\mathbb{R}_+$, telle que $F(0)=0$ et que $\lim_t F(t)/t =+\infty$. Nous désignons par $F'=f$ la dérivée à droite de F, qui est une fonction croissante et continue à droite. Nous rappelons que F est dite <u>modérée</u> s'il existe un c fini tel que $F(2t)\leq cF(t)$ (ou, de manière équivalente, s'il existe un c fini tel que $f(2t)\leq cf(t)$). Si $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ est un espace probabilisé, l'espace d'Orlicz L^F est constitué des v.a. X telles que

$$\|X\|_F = \inf\{\lambda>0 : E[F(\frac{|X|}{\lambda})]\leq 1 \} < \infty$$

Lorsque F est modérée, X appartient à L^F si et seulement si $F\circ|X|$ est intégrable[1].

D'après le lemme classique de La Vallée Poussin, une partie J de $L^1(\Omega)$ est uniformément intégrable si et seulement s'il existe une fonction de Young F telle que $\sup_{X\in J} E[F(|X|)] < \infty$. Nous allons commencer par améliorer ce lemme, puis nous donnerons quelques applications nouvelles des fonctions de Young à la théorie générale des processus.

LEMME. <u>Si</u> J <u>est uniformément intégrable</u>, <u>il existe une fonction de Young</u> G <u>modérée</u>, <u>telle que les v.a.</u> $G\circ|X|$ <u>pour</u> $X\in J$ <u>soient encore uniformément intégrables</u>.

DEMONSTRATION. Nous reprenons la démonstration classique du lemme de a Vallée Poussin (Dellacherie-Meyer, Probabilités et Potentiels , 2e éd. n° II.22, p.38). A toute suite (g_n) de nombres réels tels que

$$(1) \qquad 0\leq g_0\leq g_1\ldots \qquad \lim_n g_n = +\infty$$

nous associons la fonction croissante $g=g_0I_{[0,1[}+g_1I_{[1,2[}+\ldots$ et la fonction de Young $G(t)=\int_0^t g(s)ds$, majorée par $g_0I_{[0,1[}+(g_0+g_1)I_{[1,2[}+\ldots$ Nous avons alors

$$(2) \qquad E[G\circ|X|] \leq \sum_0^\infty g_nP\{|X|\geq n\}$$

$$(3) \qquad \int_{\{G\circ|X|>c\}} G\circ|X|P \leq \sum_k^\infty (g_0+\ldots+g_n)P\{n\leq|X|<n+1\}$$

où k est le plus petit entier n tel que $g_0+..+g_n>c$

$$= (g_0+\ldots+g_k)P\{|X|\geq k\} + \sum_{k+1}^\infty g_nP\{|X|\geq n\}$$

1. Pour tout ce qui concerne les fonctions de Young et les espaces d'Orlicz, voir Neveu, Martingales à temps discret, chap.IX (Masson, 1972).

Ces calculs étant faits, nous choisissons d'abord par le lemme de La Vallée Poussin classique une suite (f_n) comme ci-dessus telle que $\sup_{X\in J} \sum f_n P\{|X|\geqq n\} \leqq M < \infty$ (avec un changement de notations évident), et nous construisons aussi la suite $g_n = \sqrt{f_n}$, et la fonction de Young G correspondante. Nous allons montrer que $\int_{\{G\circ|X|>c\}} G\circ|X| P$ est arbitrairement petit pour c assez grand, uniformément en $X\in J$.

A cet effet, nous nous donnons un nombre $\varepsilon>0$, et désignons par j l'entier à partir duquel $g_n/f_n \leqq \varepsilon$. L'entier k du (3) tend vers $+\infty$ avec c, nous supposons donc c assez grand pour que $k>j$, et nous écrivons

$$(g_0+\ldots+g_k)P\{|X|\geqq k\} + \sum_{k+1}^{\infty} g_n P\{|X|\geqq n\}$$

$$\leqq (g_0+\ldots+g_j)P\{|X|\geqq k\} + \varepsilon\sum_{j+1}^{k} f_n P\{|X|\geqq k\} + \varepsilon\sum_{k+1}^{\infty} f_n P\{|X|\geqq n\}$$

$$\leqq (g_0+\ldots+g_j)P\{|X|\geqq k\} + \varepsilon\sum_{j+1}^{\infty} f_n P\{|X|\geqq n\}$$

Il ne nous reste plus qu'à majorer le dernier terme par εM, et $P\{|X|\geqq k\}$ par M/f_k .

Nous ne nous sommes pas occupés de la modération. C'est très simple : il suffit de prendre ci-dessus une suite f_n de la forme

$$f_n=1 \text{ pour } n=0 , \; f_n=\varphi_0 \text{ pour } n=1 , \; f_n=\varphi_1 \text{ pour } 2\leqq n<4 \ldots$$

$$f_n=\varphi_k \text{ pour } 2^k\leqq n<2^{k+1}$$

et d'assujettir la suite φ_k à la condition $\varphi_0=1$, $\varphi_{k+1}\leqq 2\varphi_k$. Alors la fonction f satisfait à $f(2t)\leqq 2f(t)$, et il en est évidemment de même de g. La fonction de Young G est donc modérée.

COROLLAIRE. <u>Si</u> J <u>est uniformément intégrable</u>, <u>il existe deux fonctions de Young modérées</u> U <u>et</u> V <u>telles que</u>

$$\sup_{X\in J} E[W\circ|X|] < \infty$$

W <u>étant la fonction de Young</u> (<u>modérée</u>) $U\circ V$.

Pour voir cela, on prend V=G dans le lemme précédent, et on applique le lemme de La Vallée Poussin classique aux v.a. uniformément intégrables $V\circ|X|$.

Nous abordons maintenant quelques applications des fonctions de Young à la théorie générale des processus. J.M. Bismut a établi tout récemment le théorème suivant

THEOREME. <u>Soit</u> X <u>un processus càdlàg. adapté de la classe (D)</u>. <u>Il existe un processus càdlàg. brut</u> Y <u>tel que</u> $Y^o=X$ <u>et</u> $E[Y^*] < \infty$.

Ici et dans toute la suite, les processus sont indexés par $[0,\infty[$, mais càdlàg. signifie qu'il existe aussi une limite à l'infini.

Nous nous proposons de préciser ce théorème de la manière suivante : puisque X appartient à la classe (D), il existe une fonction de Young

Φ telle que $\sup_T E[\Phi\circ|X_T|] \leq 1$, T parcourant l'ensemble de tous les temps d'arrêt . Nous allons montrer que, avec ces notations :

THEOREME 2. Il existe une fonction de Young $\overline{\Phi}$, dépendant seulement de Φ, et un processus càdlàg. brut Y tel que $Y^o=X$ et $E[\overline{\Phi}\circ Y^*]\leq 1$.

La démonstration est un mélange de la méthode de Bismut pour l'essentiel, et de la méthode du séminaire X, p.389 pour l'accessoire. Nous désignons par Ψ la fonction de Young conjuguée de Φ , et nous posons $\overline{\Psi} = \Psi\circ a$, où a est une fonction de Young telle que $\int_1^\infty dt/a(t)<\infty$ ($\overline{\Psi}$ est notée Γ dans le séminaire X) ; $\overline{\Phi}$ désignant la fonction de Young conjuguée de $\overline{\Psi}$, nous établirons que $\overline{\Phi}$ satisfait au théorème 2, avec une constante M au lieu de 1, et il nous restera à la diviser par M.

Mais il y a auparavant du chemin à faire. Nous fixerons les idées en prenant $a(t)=t^2$. Nous avons $\overline{\Psi}'(t)\geq\Psi'(t)$ pour t assez grand, donc $\overline{\Phi}'(s) \leq \Phi'(s)$ pour s assez grand (faire un dessin), et L^Φ s'injecte continûment dans $L^{\overline{\Phi}}$.

Nous définissons divers espaces :

- Espace $\underline{\underline{D}}^\Phi$, formé des processus càdlàg. bruts X tels que

$$[\![X]\!]_\Phi = \|X^*\|_{L^\Phi} < \infty$$

- Espace $\underline{\underline{M}}^{\overline{\Psi}}$ formé des couples (A,B) de processus à variation intégrable bruts, tels que $\Delta A_\infty=0$, $\Delta B_0=0$, que B soit purement de sauts, et que

$$[\![(A,B)]\!]_{\overline{\Psi}} = \| \int_{[0,\infty]} |dA_s|+|dB_s| \|_{L^{\overline{\Psi}}} < \infty$$

- Sous-espace $\underline{\underline{M}}_a^{\overline{\Psi}}$ formé des couples (A,B) tels que A soit adapté et B prévisible.
- Espace Λ^Φ formé des processus càdlàg. optionnels X tels que

$$\{\!|X|\!\}_\Phi = \sup_T E[\Phi\circ|X|_T] < \infty \ .$$

Nous notons les faits suivants, sans démonstration, les méthodes étant celles du séminaire X, p.380-383.

PROPRIETE 1. Si l'on met $\underline{\underline{D}}^{\overline{\Phi}}$ et $\underline{\underline{M}}^{\overline{\Psi}}$ en dualité au moyen de la forme bilinéaire

$$\beta(X\ ;\ (A,B)) = E[\int_{[0,\infty[} X_s dA_s + \int_{]0,\infty]} X_{s-} dB_s]$$

$\underline{\underline{M}}^{\overline{\Psi}}$ apparaît comme le dual de $\underline{\underline{D}}^{\overline{\Phi}}$.

PROPRIETE 2. Pour que (A,B) appartienne à $\underline{\underline{M}}_a^{\overline{\Psi}}$, il faut et il suffit que l'on ait $\beta(X\ ;\ (A,B))=\beta(X^o\ ;\ (A,B))$ pour tout processus càdlàg. borné X. En particulier, $\underline{\underline{M}}_a^{\overline{\Psi}}$ est fermé dans $\underline{\underline{M}}^{\overline{\Psi}}$ pour la topologie faible associée à la dualité précédente.

PROPRIETE 3. Considérons un X appartenant à Λ^Φ et un couple (A,B) appartenant à la boule unité de $\underline{\underline{M}}_a^\Psi$. Nous voulons majorer $|\beta(X\ ;\ (A,B))|$. Quitte à remplacer A,B par $\int|dA_s|$, $\int|dB_s|$, nous ne perdons pas de généralité en supposant A,B croissants, et de même nous supposons X positif. Nous avons alors par exemple

$$E[\int X_s dA_s\ ] = E[\int_0^\infty X_{S_t} I_{\{S_t<\infty\}} dt\ ] \quad \text{où } S_t \text{ est le temps d'arrêt } \inf\{u\ :\ A_u>t\}$$
$$= \int_0^\infty E[X_{S_t} I_{\{S_t<\infty\}}]dt$$
$$\leqq \int_0^\infty 2\|X_{S_t}\|_{L^\Phi}\ \|I_{\{S_t<\infty\}}\|_{L^\Psi}\ dt \leqq 2\{X\}_\Phi \int_0^\infty \|\ \ \|_{L^\Psi}\ dt$$

Maintenant, comme dans le séminaire X, p.390, nous avons (en notant que $\{S_t<\infty\}=\{A_\infty>t\}$

$$\|\ I_{\{A_\infty>t\}}\|_{L^\Psi} = \frac{1}{\Psi^{-1}(\frac{1}{P\{A_\infty>t\}})}$$

Mais $E[\Psi\circ A_\infty]\leqq 1$, donc $P\{A_\infty>t\}\leqq \frac{1}{\Psi(t)}$, d'où l'on déduit sans peine comme dans le sém. X $\|\ \ \|_{L^\Psi} \leqq 1/a(t)$. D'autre part , cette norme est aussi inférieure au plus petit λ tel que $\Psi(\frac{1}{\lambda})\leqq 1$. Il reste donc

$$E[\int X_s dA_s] \leqq c\{X\}_\Phi \qquad \text{où} \quad c = 2\int_0^\infty \lambda\wedge\frac{1}{a(s)}\,ds$$

On a le même résultat pour B , mais en notant que S_t est prévisible, et que l'on a $E[\Phi\circ X_{T-}]\leqq\{X\}_\Phi$ pour T prévisible.

PROPRIETE 4. Soient des $X^n\in\Lambda^\Phi$ $\downarrow 0$ tels que $X^{n*}\downarrow 0$ simplement. Alors $\beta(X^n,\ (A,B)) \to 0$ <u>uniformément</u> en (A,B) appartenant à la boule unité de $\underline{\underline{M}}^\Psi$.

En effet, on se ramène à nouveau au cas où A et B sont croissants, et on écrit comme ci-dessus

$$E[\int X_s^n dA_s] \leqq\ 2\int_0^\infty\ E[X_{S_t}^n]\ \lambda\wedge\frac{1}{a(t)}\ dt$$

Le résultat suit par convergence dominée.

PROPRIETE 5. Soit $X\in\Lambda^\Phi$; d'après la propriété 3, nous pouvons définir $\beta(X\ ;\ (A,B))$ pour $(A,B)\in\underline{\underline{M}}_a^\Psi$. <u>Alors</u> $\beta(X,.)$ <u>est continue sur la boule unité de</u> $\underline{\underline{M}}_a^\Psi$ <u>munie de</u> $\sigma(\underline{\underline{M}}_a^\Psi,\underline{\underline{D}}^\Phi)$.

La démonstration de cette propriété est identique à celle du théorème 8-8' de l'exposé sur les temps d'arrêt flous d'après Baxter-Chacòn.

Il est alors facile de conclure : $\underline{\underline{M}}_a^\Psi$ étant faiblement fermé est le dual de $\underline{\underline{D}}^\Phi/N$, où N est l'orthogonal de $\underline{\underline{M}}_a^\Psi$. La propriété ci-dessus entraîne que $\beta(X,.)$ provient d'un élément de ce dual, de norme $\|\beta(X,.)\| \leqq c\{X\}_\Phi$ (propriété 3). Donc il existe $Y\in\underline{\underline{D}}^\Phi$ de norme $\leqq(1+\varepsilon)c\{X\}_\Phi$ dans la classe mod/N correspondante. La relation $\beta(X,.)=\beta(Y,.)$ sur M_a^Ψ entraîne que $X=Y^o$, et le théorème est établi.

THEOREME 3. Soit (X^i) une famille de processus càdlàg. optionnels, appartenant uniformément à la classe (D) (toutes les v.a. X_T^i sont uniformément intégrables, en i et en T). Alors il existe une famille (Y^i) de processus càdlàg. bruts, telle que $X^i=(Y^i)^o$ pour tout i, et que les v.a. $(Y^i)^*$ soient uniformément intégrables.

Compte tenu du lemme de La Vallée Poussin classique, c'est une forme équivalente du théorème 2. On aurait un résultat analogue pour l'autre théorème de Bismut, concernant la représentation des processus càdlàg. réguliers comme projections optionnelles de processus continus.

On aimerait savoir si tout processus optionnel X (non càdlàg.) tel que $\|X\|_\Phi < \infty$ est projection optionnelle d'un Y mesurable tel que $\|Y\|_{\overline{\Phi}} < \infty$. Ce problème paraît pour l'instant inabordable.

NOTE SUR LES EPREUVES.

Une difficulté classique de la théorie des espaces d'Orlicz a été oubliée dans cet exposé (je ne suis pas entièrement coupable : Neveu lui même l'a oubliée dans la référence en première page !). C'est la suivante : si Φ et Ψ sont deux fonctions de Young conjuguées, les propriétés que voici sont équivalentes :

- le dual de L^Φ est L^Ψ
- L^Φ est séparable
- L^∞ est dense dans L^Φ
- Φ est modérée

Lorsque Φ n'est pas modérée, L^Ψ est le dual de E^Φ, l'adhérence de L^∞ dans L^Φ . Il faut donc prendre soin, dans le texte, de modifier légérement la définition de $\underline{\underline{D}}^\Phi$, qui devient l'adhérence de l'espace des processus càdlàg bruts bornés pour la norme $\|\ \|_\Phi$.

Mais il est peut être plus conforme à l'esprit de cet exposé de ne rien modifier, et de supposer Φ modérée. Il faut alors vérifier que $\overline{\Phi}$ est modérée. Attention ! L'inégalité $\overline{\Phi} \leqq \Phi$ ne suffit pas pour cela . Mais on a le critère suivant : Φ est modérée ss'il existe une constante c>1 telle que $\Psi(y) \leqq \frac{1}{2c}\Psi(cy)$ au voisinage de l'infini. Or si Ψ possède cette propriété, il est clair que $\overline{\Psi}(y)=\Psi(y^2)$ la possède (pour la constante $\sqrt{c}$) , donc $\overline{\Phi}$ est modérée.

Je remercie M. Emery pour ces remarques, et j'ajoute qu'Emery vient de résoudre très simplement le problème «inabordable» mentionné plus haut. Les travaux de Bismut et d'Emery ont été tous deux soumis au ZfW.