Giorgio Letta

Un système de notations pour les processus de Markov

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 804-805
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__804_0>

Université de Strasbourg 1977/78
Séminaire de Probabilités

UN SYSTEME DE NOTATIONS

POUR LES PROCESSUS DE MARKOV

(G. Letta)

Dans la suite on propose un système de notations permettant d'écrire de façon simple les relations qui interviennent le plus souvent dans l'étude des processus de Markov, et notamment celles qui expriment la propriété de Markov forte. L'idée qui est à la base de ce système est simple: elle consiste à écrire les relations fondamentales de la théorie comme des <u>égalités entre noyaux</u>, et non pas comme des égalités entre mesures ou entre fonctions (ou classes d'équivalence de fonctions) faisant intervenir des mesures initiales arbitraires ou des fonctions arbitraires définies dans l'espace des états. Les notations proposées permettent en même temps d'éviter des écritures telles que X_T ou θ_T, qui à la rigueur n'ont un sens que pour des temps d'arrêt partout finis.

On adopte le langage de P.-A. Meyer, <u>Processus de Markov</u>, Springer Lecture Notes <u>26</u> (1967). Sur un espace LCD E, muni de sa tribu borélienne $\underline{\underline{E}}$, on se donne un semi-groupe fellérien $(N_t)_{t\geq 0}$ de noyaux markoviens. On désigne par Ω l'espace des applications càdlàg. de $\mathbb{R}_+$ dans E, par X_t les applications coordonnées, par θ_t les opérateurs de translation. On note en outre:

$\underline{\underline{F}}^\circ$ (resp. $\underline{\underline{F}}^\circ_t$) la tribu engendrée par les X_s (resp. par les X_s avec $s\leq t$);

Q^μ la seule loi sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$ pour laquelle (X_t) est markovien, de semi-groupe (N_t) et de loi initiale μ;

$\underline{\underline{F}}^\mu$ (resp. $\underline{\underline{F}}^\mu_t$) la tribu obtenue en ajoutant à $\underline{\underline{F}}^\circ$ (resp. $\underline{\underline{F}}^\circ_t$) les ensembles extérieurement négligeables pour la loi Q^μ.

On pose enfin $\underline{\underline{F}} = \bigcap_\mu \underline{\underline{F}}^\mu$, $\underline{\underline{F}}_t = \bigcap_\mu \underline{\underline{F}}^\mu_t$ et l'on suppose que tous les temps d'arrêt sont relatifs à la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$, avec la convention $\underline{\underline{F}}_\infty = \underline{\underline{F}}$.

Si, à toute loi μ sur $(E,\underline{\underline{E}})$, on associe la restriction à $\underline{\underline{F}}$ de la mesure extérieure engendrée par Q^μ, on définit un noyau relatif au couple $((E,\underline{\underline{E}}),(\Omega,\underline{\underline{F}}))$. On désignera ce noyau par P.

Pour tout temps d'arrêt T, on désignera par X^T le noyau sous-markovien, relatif au couple $((E,\underline{\underline{E}}),(\Omega,\underline{\underline{F}}))$, qui à toute fonction f mesurable bornée sur $(E,\underline{\underline{E}})$ associe la variable aléatoire $X^T f$ ($\underline{\underline{F}}_T$-mesurable) ainsi définie:

$$(X^T f)(\omega) = \begin{cases} f(X_{T(\omega)}(\omega)) & \text{si } T(\omega) < +\infty, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On désignera en outre par Θ^T le noyau sous-markovien, relatif au couple $((\Omega,\underline{\underline{F}}),(\Omega,\underline{\underline{F}}))$, qui à toute variable aléatoire Y bornée sur $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ associe la variable aléatoire $\Theta^T Y$ définie par

$$(\Theta^T Y)(\omega) = \begin{cases} Y(\Theta_{T(\omega)}(\omega)) & \text{si } T(\omega) < +\infty, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a évidemment l'identité entre noyaux

(1) $$X^T = \Theta^T X^0.$$

Pour tout couple (S,T) de temps d'arrêt, on posera

$$S \square T = S + \Theta^S T.$$

L'opération $(S,T) \longmapsto S\square T$ est une loi de composition interne associative dans l'ensemble des temps d'arrêt. On a

$$\Theta^S \Theta^T = \Theta^{S\square T}.$$

Il en résulte, d'après (1),

(2) $$\Theta^S X^T = X^{S\square T}.$$

On remarquera que le noyau P construit ci-dessus est lié au semi-groupe (N_t) par la relation

$$PX^t = N_t.$$

Cette relation suggère d'introduire, pour tout temps d'arrêt T, le noyau N_T ainsi défini:

(3) $$N_T = PX^T.$$

Pour tout temps d'arrêt T, il existe un noyau markovien P^T, relatif au couple $((\Omega,\underline{\underline{F}}),(\Omega,\underline{\underline{F}}))$, <u>caractérisé</u> par les propriétés suivantes:

(a) P^T est un <u>noyau de conditionnement</u> par rapport à la sous-tribu $\underline{\underline{F}}_T$ de $\underline{\underline{F}}$, c'est-à-dire qu'il transforme toute variable aléatoire bornée en une variable aléatoire $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable et que, pour tout élément A de $\underline{\underline{F}}_T$, P^T commute avec le noyau de multiplication par l'indicatrice de A;

(b) $PP^T = P$;

(c) $P\Theta^T = X^T P$ (<u>propriété de Markov forte</u>).

Pour tout couple (S,T) de temps d'arrêt, on a $P^S X^{S\square T} = P^S \Theta^S X^T = X^S P X^T = X^S N_T$, et par conséquent $N_{S\square T} = N_S N_T$. Il en résulte que, si $S\square T = T$, alors toute fonction de la forme $N_T f$ est N_S-invariante.