Séminaire de probabilités (Strasbourg)

D. Bakry
Paul-André Meyer

Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques, II

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 146-150
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__146_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1980/81

SUR LES INEGALITES DE SOBOLEV LOGARITHMIQUES. II

par D. Bakry et P.A. Meyer

Ce travail est la suite de l'exposé précédent, qu'il complète en établissant un résultat plus fort (grâce à la méthode d'interpolation complexe). Nous allons examiner comment les opérateurs R^{ε}, avec $\mathcal{R}(\varepsilon)\geq 0$, opèrent sur les espaces d'Orlicz $L^p\log^r L$, pour $1<p<\infty$ et r réel - espaces définis dans l'exposé de ce volume << Interpolation entre espaces d'Orlicz >>. Notre but est d'établir le théorème suivant :

THEOREME 6 (1). Si $\mathcal{R}z=\varepsilon\geq 0$, l'opérateur R^z applique $L^p\log^r L$ dans $L^p\log^{r+p\varepsilon}L$.

I. EXTENSION DU THEOREME DE STEIN

Notre première tâche va consister à regarder ce qui se passe pour $\varepsilon=0$, c'est à dire pour $z=i\alpha$. Pour faire cela, nous ne pouvons nous référer au travail original de Stein (cf. le théorème 1) ; il nous faut utiliser la démonstration probabiliste du théorème de Stein, due à Varopoulos [1], et présentée dans le volume précédent (voir l'exposé sur la théorie de Littlewood-Paley). Cette démonstration concerne une classe un peu plus restreinte de multiplicateurs , donnés par

$$m(\lambda) = \lambda\int_0^{\infty} e^{-2u\sqrt{\lambda}}uM(u)du \tag{14}$$

où M est une fonction complexe, bornée en module par K. Cette classe est << plus restreinte >> que celle de Stein, en raison de la formule

$$e^{-2u\sqrt{\lambda}} = \int e^{-\lambda s}\mu_{2u}(ds) \quad , \quad \mu_{2u}(ds) = \frac{u}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2/s}\, s^{-3/2}ds \ ,$$

mais pour $M(u) = u^{2i\alpha}$, on trouve le multiplicateur qui nous concerne :

$$m(\lambda)=c(\alpha)\lambda^{-i\alpha} \qquad \text{avec} \quad c(\alpha) = \Gamma(2+2i\alpha)/2^{2+2i\alpha} \tag{15}$$

de sorte que l'opérateur T_m sur L^2 vaut $c(\alpha)R^{i\alpha}$. Maintenant, comment passe t'on de f à $T_m f$? Le procédé utilisé consiste (sans vouloir donner trop de détails) à utiliser un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,P)$ et à construire une martingale continue X et une v.a. Y telles que

- X_∞ sous P a même loi que f sous μ , Y a même loi que $T_m f$;
- On passe de X à Y par la succession des opérations suivantes : former l'intégrale stochastique $\int_0^t M(u)dX_u$; la projeter sur l'espace stable engendré par un mouvement brownien de la même filtration ce qui donne une martingale Z; prendre l'espérance conditionnelle de la v.a. terminale Z_∞ par rapport à une tribu convenable.

Soit maintenant Φ une fonction de Young modérée et à conjuguée

(1) Le numérotage des énoncés et des formules fait suite à celui de l'exposé précédent

modérée, comme les fonctions définissant les espaces $L^p\log^r L$ pour $p>1$.
On a la chaîne d'inégalités suivantes

- f et X_∞ ont même norme dans l'espace d'Orlicz $\Phi(L)$
- La norme de X_∞ permet de majorer celle de X^*, l'inégalité de Doob étant vraie pour les fonctions de Young comodérées (résultat dû à Dellacherie. Voir Prob. et Pot. VI. (104.6)).
- Comme Φ est modérée, l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy nous permet de remplacer X^* par $[X,X]_\infty^{1/2} = \langle X,X\rangle_\infty^{1/2}$ (X est continue).
- L'intégrale stochastique de $M(u)$ bornée par K, puis la projection orthogonale, fournissent une martingale Z telle que $\langle Z,Z\rangle \leq K\langle X,X\rangle$. L'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy permet alors de majorer la norme de Z^*, donc de Z_∞.
- Enfin, l'espérance conditionnelle diminue la norme dans $\Phi(L)$. Et pour finir, nous avons obtenu le résultat désiré. De manière explicite :

THEOREME 7. Soit Φ une fonction de Young modérée et comodérée. Alors les opérateurs $\Gamma(2+2i\alpha)R^{i\alpha}$ sont uniformément bornés dans l'espace d'Orlicz $\Phi(L)$.

II. PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME 6

Nous introduisons maintenant la terminologie de l'interpolation entre espaces d'Orlicz : l'espace d'Orlicz $L^p\log^r L$ sera noté $E(\frac{1}{p}, -\frac{r}{p})$, parce qu'il admet un générateur concave qui vaut $x^{1/p}\log^{-r/p}x$ pour x grand. L'espace d'interpolation entre $E(a,b)$ et $E(c,d)$ ($0<a,c<1$; b et d réels) est pour la valeur t du paramètre d'interpolation $E((1-t)a+tc, (1-t)b+td)$. Le théorème 6 nous dira que R^z applique $E(a,b)$ dans $E(a,b-\varepsilon)$. Le théorème 7 nous dit que $R^{i\alpha}$ est borné de $E(a,b)$ dans lui même. Ajouter à cela qu'il est classique que le dual de $L^p\log^{mp}L$ est $L^q\log^{-mq}L$, où m est réel, et p et q sont conjugués. Avec notre notation, le dual de $E(a,b)$ est $E(1-a,-b)$.

Ecrivons d'autre part dans ce langage les résultats de Feissner, établis pour un opérateur étroitement lié à $R^{1/2}$, comme s'ils étaient établis pour $R^{1/2}$ lui-même : $R^{1/2}$ applique $L^2\log^n L$ dans $L^2\log^{n+1}L$ pour n entier (de signe quelconque), soit $E(\frac{1}{2},-\frac{n}{2})$ dans $E(\frac{1}{2}, \frac{-n}{2}-\frac{1}{2})$. Une première interpolation va nous donner que $R^{1/2}$ applique $E(\frac{1}{2},d)$ dans $E(\frac{1}{2}, d-\frac{1}{2})$ pour tout d réel, ce qui entre dans le théorème 6. Il est un peu plus agréable d'écrire ce résultat pour $R^1=R^{1/2}R^{1/2}$:

(16) $\qquad R^1$ est un opérateur borné de $E(\frac{1}{2}, d)$ dans $E(\frac{1}{2}, d-1)$.

Nous allons interpoler entre ce résultat et le théorème de Stein. La représentation spectrale (3)

$$R^z = \int_{[1/2,\infty[} \lambda^{-z} dE_\lambda$$

montre que l'application $z \mapsto R^z$, considérée comme prenant ses valeurs dans l'espace des opérateurs bornés de L^2, est continue sur la bande $0 \leq x \leq 1$ pour la topologie forte, holomorphe, et uniformément bornée en norme. Nous allons étudier ses limites au bord.

Nous utilisons l'équivalent de Stirling pour $\Gamma(x+iy)$ (x fixé), c.à d. $\Gamma(x+iy) \sim \sqrt{2\pi}e^{-\pi|y|/2}|y|^{x-1/2}$, pour remplacer le malcommode $\Gamma(2+2iy)$ dans le théorème 7 par $\Gamma(1+iy)^2$, dont le rapport au précédent est borné. Considérons donc la fonction

(17) $$H_z = \left(\frac{\Gamma(1+z)}{1+z}\right)^2 R^z$$

qui, considérée dans l'espace des opérateurs sur L^2, possède les mêmes propriétés que R^z. Pour $\Re z=0$

(18) H_{iy} est bornée (uniformément) de $E(a,b)$ dans lui même.

Pour $\Re z=1$, nous écrivons $\Gamma(2+iy)=(1+iy)\Gamma(1+iy)$, et donc

$$H_{1+iy} = \left(\frac{1+iy}{2+iy}\right)^2 R^1(\Gamma(1+iy)^2 R^{iy})$$

de sorte que, par les résultats de Stein et de Feissner

(19) H_{1+iy} est bornée (uniformément) de $E(\frac{1}{2}, d)$ dans $E(\frac{1}{2},d-1)$

Le théorème de Calderón va alors nous donner que, pour $0<t<1$

(20) R^t est borné de $E(a(1-t)+\frac{t}{2},b(1-t)+dt)$ dans $E(a(1-t)+t/2, b(1-t)+dt-t)$

Fixons nous u et v ($0<u<1$, v réel), et choisissons t assez petit pour que $\frac{t}{2}< u\wedge(1-u)$. Alors $a=(u-\frac{t}{2})/1-t$ appartient à l'intervalle $]0,1[$. Choisissons aussi $b=0$ et $d=v/t$. Nous voyons alors que

(21) R^t est borné de $E(u,v)$ dans $E(u,v-t)$

Ce résultat est établi seulement pour t petit, mais s'étend à tout $t>0$, car $R^{nt}=(R^t)^n$. Pour obtenir le résultat analogue pour R^{t+iy}, on l'écrit R^tR^{iy} et on applique le théorème de Stein une nouvelle fois.

On voit donc que le théorème 6 est ramené à la vérification des résultats de Feissner, sous une forme légèrement modifiée.

III. SUR LES INEGALITES DE FEISSNER

Nous avons ramené la vérification du théorème 6 à celle du fait suivant : $R^{1/2}$ applique $L^2\log^n L$ dans $L^2\log^{n+1}L$ pour $n\in Z$. Comme $R^{1/2}$ est self-adjoint, et le dual de $L^2\log^r L$ est $L^2\log^{-r}L$ (Krasnosel'skii et Rutickii, Ie partie, § 7), il suffit de traiter le cas où $n\in N$. D'autre part, comme dans l'exposé I, nous pouvons ramener l'étude de $R^{1/2}$ à celle de l'opérateur $T = \int_0^1 s^{-1/2}P_s ds$, qui est un vrai noyau borné. Rappelons (inégalité de Gross) que T est borné de L^2 dans $L^2\log L$

donc de $L^2\log^{-1}L$ dans L^2. Nous notons que T est positif, borné de L^1 dans L^1, de L^∞ dans L^∞. Nous utiliserons aussi le fait que l'espace mesuré est fini.

Le raisonnement se fait par récurrence. Plutôt que de le faire de manière formelle, nous illustrerons les deux premiers pas. Nous désignons par C une quantité qui ne dépend pas des fonctions considérées, mais peut varier de place en place. Commençons par une remarque :

REMARQUE. Soit f positive, de norme ≤ 1 dans $L^p\log^{rp}L$. Alors la norme de $f\log^k f$ dans $L^p\log^{r(p-k)}L$ est bornée par C (k entier).

Voici le principe d'une démonstration, qui ne mérite pas d'être mise en forme : dire que $\|f\|$ est bornée revient à écrire que l'on a sur $\{f>C\}$ une majoration de la forme $f\leq h^{1/p}\log^{-r}h$, où h est positive d'intégrale majorée par C. On a alors une inégalité analogue pour $|f\log^k f|$.

<u>Pas initial</u> : montrer que T est borné de $L^2\log L$ dans $L^2\log^2 L$. Cela revient à montrer que si f et g sont positives, bornées, avec $\|f\|_{L^2\lg L}$ et $\|g\|_{L^2\lg^{-2}L} \leq 1$, on a $<Tf,g> \leq C$. On écrit qu'il existe une fonction positive $\Theta \geq 1$, bornée, telle que $g\leq\Theta^{1/2}\log\Theta$ et $\int\Theta\leq C$, et on pose $h=\Theta^{1/2}$, qui appartient à L^2. On considère alors la fonction

$$a(z) = < T(\varphi^{2(1-z)}),h^{2z} > \qquad \varphi=1+f$$

qui est continue dans la bande fermée $0\leq x\leq 1$, bornée (f et h sont bornées), holomorphe dans la bande ouverte. En la regardant au bord, on trouve qu'elle est bornée par C (NB. On utilise ici le fait que T applique L^1 et L^∞ dans eux mêmes). Donc on a aussi $|a'(\frac{1}{2})|\leq C$. Or $a'(\frac{1}{2})$ comporte deux termes, qui sont à des facteurs près

$$< T(\varphi\log\varphi), h > \quad \text{et} \quad < T(\varphi), h\log h >$$

Le premier se majore, car $\varphi\log\varphi$ reste borné dans $L^2\log^{-1}L$ par la remarque précédente, et T applique $L^2\log^{-1}L$ dans L^2, tandis que $h\in L^2$. Donc on majore aussi le dernier terme par différence. Mais $g\leq 2h\log h$, donc on a majoré du même coup $<T(\varphi),g>$ et $<Tf,g>$ puisque $f\leq\varphi$.

<u>Pas suivant</u> : montrer que T est borné de $L^2\log^3L$ dans $L^2\log^4L$ (ce qui se passe entre $L^2\log^2L$ et $L^2\log^3L$ découle par interpolation). Cette fois on prend $\|f\|_{L^2\log^3L} \leq 1$, $\|g\|_{L^2\log^{-4}L} \leq 1$, $g\leq \Theta^{1/2}\log^2\Theta$ ($\Theta\geq 1$, bornée, $\int\Theta\leq C$) et on prend $h=\Theta^{1/2}$. Considérant la même fonction a(z), on calcule sa dérivée seconde $a''(\frac{1}{2})$, majorée en module par C. Elle comporte trois termes : à des facteurs près

$$< T(\varphi\log^2\varphi),h > , < T(\varphi\log\varphi), h\log h > , < T\varphi , h\log^2 h >$$

Si nous savons majorer les deux premiers par C, nous aurons aussi majoré le dernier, et donc aussi $< Tf,g >$.

D'après la remarque, la relation $\|\varphi\|_{L^2\log^3 L} \leqq C$ entraîne $\|\varphi\log\varphi\|_{L^2\lg L} \leqq C$ et $\|\varphi\log\varphi\|_{L^2\log^{-1}L} \leqq C$. Appliquant T, on voit que $T(\varphi\log\varphi)$ est borné dans $L^2\log^2 L$ et $T(\varphi\log^2\varphi)$ dans L^2 . D'autre part, toujours d'après la remarque, les fonctions correspondantes hlogh et h sont bornées respectivement dans $L^2\log^{-2}L$ et L^2. Donc $< T(\varphi\log\varphi), h\log h >$ et $< T(\varphi\log^2\varphi, h >$ sont bien bornés.

<u>Pas suivant</u> : $L^2\log^5 L$ dans $L^2\log^6 L$ par triple dérivation, et on comble l'intervalle manquant par interpolation.

CONCLUSION. Dans le premier exposé, nous avons vu ce que peuvent donner les méthodes directes de majoration, à partir du théorème d'hypercontractivité : en aucun cas elles ne permettent d'obtenir le cas limite (R^ε applique L^p dans $L^p\log^{p\varepsilon}L$), et elles se prêtent mal à l'étude de R^ε opérant sur les espaces $L^p\log^k L$, $k\neq 0$ (nous avons eu peur de la complexité des calculs !).

Dans cet exposé-ci, nous avons obtenu le résultat général en nous appuyant sur deux résultats puissants : le théorème de Stein légèrement amélioré, qui **traite le cas de** R^{ix}, <u>et qui est valable pour tous les semi-groupes symétriques</u>, et les inégalités de Gross et de Feissner, qui expriment l'hypercontractivité dans le cas de L^2. Il est étonnant que la méthode qui donne ces inégalités soit une méthode purement analytique de dérivation.

Dernière remarque : nous avons utilisé les propriétés suivantes du semi-groupe : la symétrie par rapport à une mesure <u>finie</u> (ce point est utilisé dans la démonstration des inégalités de Feissner ; il est possible que l'on puisse s'en passer) ; l'hypercontractivité (sous la forme des inégalités de Gross et de Feissner) ; enfin, la convergence exponentielle de $P_t f$ vers 0 pour f d'intégrale nulle.

REFERENCES. Voir l'exposé I, sauf

VAROPOULOS (N.). Aspects of probabilistic Littlewood-Paley theory. J. Funct. Anal. 38, 1980, p. 25-60.