PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur une inégalité de Stein

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 151-152
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__151_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1980/81

SUR UNE INEGALITE DE STEIN

par P.A. Meyer

Il y a cinq ans que cette note aurait dû être rédigée, mais il n'est jamais trop tard.

Dans son livre sur la théorie de Littlewood-Paley, Stein fait jouer un rôle crucial à une inégalité de martingales du type de Burkholder. Il énonce cette inégalité en temps discret, où l'on ne voit pas grand chose. Cette note consiste en une traduction et démonstration de la même inégalité en temps continu.

On se place sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t))$ comme d'habitude, et on considère une martingale (X_t). Voici le théorème de Stein (chez Stein, $\varepsilon=1$) :

THEOREME. <u>On a pour</u> $1<p<\infty$, <u>pour</u> $\varepsilon>0$

$$(1) \qquad \sqrt{\varepsilon}\, \Big\| \Big(\int_0^\infty \frac{ds}{s^{1+2\varepsilon}} \Big(\int_0^s t^\varepsilon dX_t\Big)^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p} \leqq A_p \|X\|_{L^p}$$

DEMONSTRATION. Nous considérons un mouvement brownien standard (B_s), issu de 0 , défini sur $(\Omega',\underline{\underline{F}}',P',(\underline{\underline{F}}'_s))$, et nous construisons le produit $\bar{\Omega}=\Omega\times\Omega'$, $\bar{P}=P\times P'$. Si h est une v.a. sur Ω (resp. sur Ω'), nous convenons de noter encore par h la fonction $(\omega,\omega')\mapsto h(\omega)$ sur $\bar{\Omega}$ (resp. $h(\omega')$). Ainsi nous pouvons parler des tribus $\underline{\underline{F}}_t$ ou $\underline{\underline{F}}'_s$ (indépendantes) sur $\bar{\Omega}$.

Nous pouvons supposer que la martingale X est bornée dans L^p.

Considérons une fonction déterministe $a(s,t)$ sur $\mathbb{R}_+^2$, combinaison linéaire finie d'indicatrices de rectangles bornés. Nous allons évaluer de deux manières l'intégrale stochastique double (élémentaire) $\int a(s,t)dB_s dX_t = M(\omega,\omega')$.

1) Nous la considérons comme une intégrale stochastique $\int_0^\infty \varphi_s dB_s$, où $\varphi_s = \int a(s,t)dX_t$. Comme (B_s) est encore un m^t brownien par rapport à la filtration obtenue en ajoutant tout $\underline{\underline{F}}$ à $\underline{\underline{F}}'_0$, cette intégrale est une i.s. usuelle de processus prévisible, et nous avons (Burkholder)

$$(2) \qquad \|M\|_{L^p} \sim \Big\| \Big(\int_0^\infty ds\, \Big(\int_0^\infty a(s,t)dX_t\Big)^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p}$$

2) Soit H l'espace de Hilbert $L^2(\underline{\underline{F}}')$, et considérons le processus déterministe étagé à valeurs dans H $t\mapsto \psi_t$, où $\psi_t = \int a(s,t)dB_s$. Nous considérons le processus à valeurs dans H (intégrale stochastique élémentaire)

$$M_t = \int_0^t \psi_u dX_u$$

Ceci est en réalité une somme finie $\sum h_i(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})$, avec des $h_i \in H$, donc (les X_t étant intégrables), M_t est une vraie martingale à valeurs dans H. Le processus croissant scalaire associé est $\int_0^t \|\psi_u\|^2 d[X,X]_u$, où

$$\|\psi_u\|^2 = \int P'(d\omega')(\int a(s,u)dB_s(\omega'))^2 = \int a^2(s,u)ds$$

On a de même

$$\|M_\infty\|_H^2 = \int M^2(\omega,\omega')P'(d\omega') = \int_0^\infty ds(\int a(s,t)dX_t)^2$$

Ecrivant alors l'inégalité de Burkholder vectorielle

$$(3) \qquad \| \, \|M_\infty\|_H \, \|_{L^p} \leqq c_p \| \, (\int_0^\infty \|\psi_u\|^2 d[X,X]_u)^{1/2} \|_{L^p}$$

et la rapprochant de (2), on trouve une inégalité

$$(4) \qquad \|(\int ds(\int a(s,t)dX_t)^2 \,)^{1/2}\|_{L^p} \leqq c_p \|(\int d[X,X]_t (\int a^2(s,t)ds)^{1/2} \|_{L^p}$$

Ceci a été établi pour un processus a(s,t) très simple, mais il n'y a pas de difficulté à l'étendre aux processus a(s,t) " raisonnables" .

L'inégalité (1) concerne le cas où $a(s,t) = \frac{1}{s^{\varepsilon+1/2}} t^\varepsilon I_{\{t<s\}}$. On a alors $\int a^2(s,t)ds = t^{2\varepsilon}\int_t^\infty ds/s^{1+2\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon}$. Du côté droit, nous avons donc simplement $c_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \|[X,X]_\infty^{1/2}\|_{L^p} \leqq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_p \|X\|_{L^p}$.