SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PIERRE PRIOURET

# Remarques sur les petites perturbations de systèmes dynamiques

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 16 (1982), p. 184-200
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__184_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

REMARQUES SUR LES PETITES PERTURBATIONS DE SYSTEMES DYNAMIQUES.

par

Pierre PRIOURET (*)

Dans leur article fondamental [4], Ventcel' et Freidlin donnent des estimations asymptotiques des probabilités $P[y^\varepsilon \in A]$ lorsque $y^\varepsilon$ est une diffusion sur une variété compacte de générateur $\varepsilon^2\Delta + b$, $\Delta$ étant un opérateur elliptique. Dans la dernière partie de son cours à l'école d'été de Saint-Flour [1], Azencott étend ce résultat à une large classe de $\Delta$ semi-elliptique sur une variété quelconque. La méthode utilisée par Azencott est d'établir d'abord les estimations sur un ouvert de $\mathbf{R}^d$ en "transportant" les résultats obtenus pour $\varepsilon\beta$, $\beta$ mouvement brownien ; puis de les remonter sur la variété. Cependant, comme le fait remarquer Azencott à la fin de son cours, il reste encore deux questions : dans le cas $\mathbf{R}^d$, remplacer l'hypothèse $\sigma$ de classe $C^1$ par $\sigma$ lipschitzienne et sur une variété, de supprimer une hypothèse de rang constant de $\sigma$. C'est ce que nous faisons dans ce travail. Dans une permière partie, nous démontrons pour $\sigma$ lipschitzienne, le résultat essentiel d'approximation d'Azencott (ce n'est pas un gain considérable, mais la méthode utilisée est quelque peu différente) puis, pour que ce texte soit lisible, nous indiquons rapidement comment ceci entraîne les estimations cherchées. Dans une deuxième partie nous recollons ces estimations lorsque A est un tube entourant une fonction ; ceci donne immédiatement la minoration puis la majoration en montrant que la loi de $y^\varepsilon$ est "presque" portée par un compact. Nous remercions Mme Maurel et M. Brancovan pour de nombreuses et utiles remarques.

1 - Première partie : Cas de $\mathbf{R}^d$. On se donne sur $\mathbf{R}^d$ un champ de matrice $d \times p$ $\sigma(x)$ et des champs de vecteurs $b(x)$, $b_\varepsilon(x)$. On suppose :

*(1)* $\sigma, b_\varepsilon, b$ sont uniformément lipschitziens, bornés en norme par $M$,

*(2)* $b_\varepsilon$ tend vers $b$ uniformément sur $\mathbf{R}^d$.

On note $y_t^\varepsilon = y_t^\varepsilon(x)$ la solution de l'E.D.S. :

$$(3) \qquad y_t^\varepsilon = x + \int_0^t b_\varepsilon(y_s^\varepsilon)ds + \varepsilon\int_0^t \sigma(y_s^\varepsilon)d\beta_s$$

où $\beta$ est un mouvement brownien p-dimensionnel, défini sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}_t, P)$.

---

(*) LABORATOIRE DE CALCUL DES PROBABILITES - 4 place Jussieu - Tour 56 - Couloir 56-66 - 3ème Etage - 75230 PARIS CEDEX 05

La méthode d'Azencott consiste à regarder où se trouve $y_t^\varepsilon$ lorsque $\varepsilon\beta$ est près de $f$, ceci avec une erreur inférieure à $\exp(-R/\varepsilon^2)$. Commençons par examiner le cas où $f \equiv 0$, avec un "drift" légèrement différent.

On fixe un réel $T > 0$ et on note $\|u\| = \sup\{|u(t)| \; ; \; t \leq T\}$.

*Proposition 1 :* Soit $c_\varepsilon(s,x)$ et $c(s,x)$ des champs de vecteurs vérifiant :

(4) $$|c_\varepsilon(s,x)| + |c(s,x)| \leq \Phi(s), \; s \leq T \text{ avec } \int_0^T \Phi^2(s)ds < +\infty,$$

(5) $$|c(s,x) - c(s,y)| \leq \Psi(s)|x-y| \text{ avec } \int_0^T \Psi(s)ds = K < +\infty \; ; \; s \leq T, \; x,y \in \mathbb{R}^d,$$

(6) $$c_\varepsilon \to c \text{ uniformément sur } [0,T] \times \mathbb{R}^d.$$

Supposons que $x_t^\varepsilon$ et $h(t)$ vérifient pour un mouvement brownien $\beta^\varepsilon$,

(7) $$x_t^\varepsilon = x + \int_0^t c_\varepsilon(s,x_s^\varepsilon)ds + \varepsilon\int_0^t \sigma(x_s)d\beta_s^\varepsilon$$

(8) $$h(t) = z + \int_0^t c(s,h(s))ds.$$

Alors, pour tout $R > 0$, $\rho > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha > 0$, $r > 0$ tels que si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $|x-z| < r$, on a :

$$\varepsilon^2 \log P\left[\|x^\varepsilon - h\| > \rho, \; \|\varepsilon\beta^\varepsilon\| < \alpha\right] \leq -R.$$

Démonstration : Pour simplifier on écrira $\beta$ pour $\beta^\varepsilon$.

Commençons par discrétiser le processus $x_t^\varepsilon$. Soit $n > 0$, $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{T}{n}, \ldots, t_n = T$ et :

$$x_t^{\varepsilon,n} = x_{t_k}^\varepsilon \quad \text{si} \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \; k = 0,\ldots,n-1.$$

*Lemme 2 :* Pour tout $R > 0$, $\gamma > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $n$ tels que si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$\varepsilon^2 \log P\left[\|x^\varepsilon - x^{\varepsilon,n}\| > \gamma\right] \leq -R.$$

En effet, $$P\left[\|x^\varepsilon - x^{\varepsilon,n}\| > \gamma\right] = P\left[\bigcup_{k=0}^{n-1} \sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} |x^\varepsilon(t) - x^{\varepsilon,n}(t)| > \gamma\right]$$

$$\leq \sum_0^{n-1} P\left[\sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} \left|\int_{t_k}^t c_\varepsilon(s,x_s^\varepsilon)ds\right| > \frac{\gamma}{2}\right] + P\left[\sup\left|\int_{t_k}^t \varepsilon\sigma(x_s^\varepsilon)d\beta_s\right| > \frac{\gamma}{2}\right].$$

Mais si $t_k \leq t < t_{k+1}$, $|\int_{t_k}^{t} c_\varepsilon ds| \leq \int_{t_k}^{t} \Phi(s)ds \leq \sqrt{\frac{T}{n}}\,\|\Phi\|_2$ et donc la probabilité du premier ensemble est nulle si $n \geq n_1$. Quant à la probabilité du second, elle est - inégalité exponentielle - majorée par $2d\exp(-\frac{n\gamma^2}{8TdM^2\varepsilon^2})$. Et finalement en choisissant un $n$ assez grand,

$$\varepsilon^2 \log P\left[\|x^\varepsilon - x^{\varepsilon,n}\| > \gamma\right] \leq \varepsilon^2 \log 2dn - \frac{n\gamma^2}{8TdM^2} \leq -R \quad \text{si} \quad \varepsilon \leq \varepsilon_o.$$

*Lemme 3* : Pour tout $R > 0$, $\rho > 0$, il existe $\varepsilon_o > 0$, $\alpha > 0$ tels que si $\varepsilon \leq \varepsilon_o$

$$\varepsilon^2 \log P\left[\|\varepsilon\int_0^{\cdot} \sigma(x_s^\varepsilon)d\beta_s\| > \rho \ ; \ \|\varepsilon\beta\| < \alpha\right] \leq -R.$$

En effet $[\ -\ ] \subset \{\|x^\varepsilon - x^{\varepsilon,n}\| > \gamma\} \cup \{\|\varepsilon\int_0^{\cdot} (\sigma(x_s^\varepsilon) - \sigma(x_s^{\varepsilon,n}))d\beta_s\| > \frac{\rho}{2},$

$$\|x^\varepsilon - x^{\varepsilon,n}\| \leq \gamma\} \cup \{\|\varepsilon\int_0^{\cdot} \sigma(x_s^{\varepsilon,n})d\beta_s\| > \frac{\rho}{2},\ \|\varepsilon\beta\| < \alpha\} = A \cup B \cup C.$$

Toujours d'après l'inégalité exponentielle, $P(B) \leq 2\exp(\frac{-\rho^2}{8T\varepsilon^2\gamma^2K^2d}) \leq \frac{1}{2}\exp(-\frac{R}{\varepsilon^2})$ si $\gamma$ est choisi convenablement et $\varepsilon \leq \varepsilon_1$. D'après le lemme 2, $P(A) \leq \frac{1}{2}\exp(-\frac{R}{\varepsilon^2})$ si $n$ est choisi assez grand et $\varepsilon \leq \varepsilon_2$.

Alors sur $\{\varepsilon\|\beta\| < \alpha\}$, on a :

$$|\varepsilon\int_0^t \sigma(x_s^{\varepsilon,n})d\beta_s| = \varepsilon|\sum_{k=0}^{n-1} \sigma(x_{t_k})(\beta_{t_{k+1}\wedge t} - \beta_{t_k\wedge t})| \leq 2Mn\alpha$$

et $C = \emptyset$ si $\alpha < \rho/4Mn$.

Revenons à la démonstration de la proposition 1,

$$x_t^\varepsilon - h(t) = x - z + \int_0^t (c_\varepsilon(s,x_s^\varepsilon) - c(s,x_s^\varepsilon))ds + \int_0^t (c(s,x_s^\varepsilon) - c(s,h_s))ds + U_t^\varepsilon,$$

où $U_t^\varepsilon = \varepsilon\int_0^t \sigma(x_s^\varepsilon)d\beta_s$.

Comme $c_\varepsilon$ tend vers $c$ uniformément, on a pour $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, et $|x-z| < \frac{\rho}{4} e^{-K}$

$|x_t - h(t)| \leq \frac{\rho}{2} e^{-K} + \|U_\varepsilon\| + \int_0^t \Psi(s)\cdot |x_s^\varepsilon - h(s)| ds$ d'où ([2] lemme 4.13 p. 130)

$$\|x^\varepsilon - h\| \leq \frac{\rho}{2} + \|U_\varepsilon\| e^K \quad \text{et donc}$$

$$P\left[\|x^\varepsilon - h\| > \rho,\ \|\varepsilon\beta\| < \alpha\right] \leq P\left[\|U_\varepsilon\| > \frac{\rho}{2} e^{-K},\ \|\varepsilon\beta\| < \alpha\right]$$

et il suffit d'appliquer le lemme 3.

Ceci fait, soit $f$ une fonction continue à valeurs $\mathbb{R}^p$ telle que $\int_0^T |f_s'|^2 ds \leq a < +\infty$ et définissons des probabilités $\overline{P}^\varepsilon$ sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}_T)$ par

$$\frac{d\overline{P}^\varepsilon}{dP} = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (f_s', d\beta_s) - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T |f_s'|^2 ds\right) \tag{9}$$

alors (Girsanov)

$$\overline{\beta}_t^\varepsilon = \beta_t - \frac{1}{\varepsilon} f_t \quad \text{est un } (\Omega, \overline{P}^\varepsilon) \text{ brownien et} \tag{10}$$

$$\frac{dP}{d\overline{P}^\varepsilon} = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (f_s', d\beta_s) + \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T |f_s'|^2 ds\right). \tag{11}$$

De plus (3) devient,

$$y_t^\varepsilon = x + \int_0^t c_\varepsilon(s, y_s^\varepsilon) ds + \varepsilon\int_0^t \sigma(y_s^\varepsilon) d\overline{\beta}_s^\varepsilon, \quad \overline{P}^\varepsilon \text{ p.s., où} \tag{12}$$

$$c_\varepsilon(s,y) = b_\varepsilon(y) + \sigma(y)\cdot f_s'. \tag{13}$$

Associons enfin à $f$, la solution $g$ de

$$g_t = z + \int_0^t \{b(g_s) + \sigma(g_s)\cdot f_s'\} ds. \tag{14}$$

On notera $g = B_z(f)$ ; $B_z$ est l'application introduite par Azencott dans son cours.

*Théorème 4* : Sous les hypothèses (1), (2), on a, pour $y^\varepsilon$ et $g$ définies par (3), (14) : pour tout $R > 0$, $\rho > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha > 0$, $r > 0$ tels que si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $|z-x| < r$,

$$\varepsilon^2 \log P\left[\|y^\varepsilon - g\| > \rho,\ \|\varepsilon\beta - f\| < \alpha\right] \leq -R.$$

<u>Démonstration</u> : Posons $A = \{\|y^\varepsilon - g\| > \rho,\ \|\varepsilon\beta - f\| < \alpha\}$ et $U = \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (f'_s, d\beta_s)\right]$.

On a, d'une part,

$$P\left[U > \exp(\frac{\lambda}{\varepsilon^2})\right] \leq P\left[\left|\int_0^T (f'_s, d\beta_s)\right| > \frac{\lambda}{\varepsilon}\right] \leq 2\exp(-\frac{\lambda^2}{2a\varepsilon^2}),$$

et d'autre part,

$$P\left[A \cap (U \leq \exp\frac{\lambda}{\varepsilon^2})\right] = \overline{E}^\varepsilon\{\frac{dP}{d\overline{P}^\varepsilon}\ ;\ A \cap (U \leq \exp\frac{\lambda}{\varepsilon^2})\} \leq \exp\frac{a}{2\varepsilon^2}\exp\frac{\lambda}{\varepsilon^2}\,\overline{P}^\varepsilon(A)$$

et donc,

$$P[A] \leq \exp\frac{a}{2\varepsilon^2}\cdot\exp\frac{\lambda}{\varepsilon^2}\,\overline{P}^\varepsilon(\|y^\varepsilon - g\| > \rho,\ \|\varepsilon\overline{\beta}^\varepsilon\| < \alpha) + 2\exp(-\frac{\lambda^2}{2a\varepsilon^2})$$

Mais le processus $y^\varepsilon$ vérifie (12) relativement à $\overline{\beta}^\varepsilon$ et on est sous les conditions de la proposition 1. Etant donné R, on choisit $\lambda$ assez grand pour que le dernier terme soit plus petit que $\exp(-R/\varepsilon^2)$ puis, par la proposition 1, $\varepsilon_o, \alpha, r$ tels que $\overline{P}^\varepsilon(\|y^\varepsilon - g\| > \rho,\ \|\varepsilon\overline{\beta}^\varepsilon\| < \alpha) \leq \exp(-\frac{R + \lambda + a/2}{\varepsilon^2})$, d'où le théorème.

<u>Remarque</u> : Dans le théorème 4, $\varepsilon_o, \alpha, r$ ne dépendent que de $R, \rho$ et a et non de f.

2 - On notera $C(\mathbb{R}^p)$ l'espace des applications continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^p$ muni de la topologie de la convergence uniforme, $C^o(\mathbb{R}^p)$ celles qui, en plus, sont absolument continues, $C_x(\mathbb{R}^p)$, $C_x^o(\mathbb{R}^p)$ celles issues de x.

On posera pour $f \in C(\mathbb{R}^p)$,

$$\text{(15)} \qquad \tilde{\lambda}(f) = \frac{1}{2}\int_0^T |f'_t|^2 dt \quad \text{si } f \in C^o, \quad +\infty \quad \text{sinon.}$$

Alors on a le théorème suivant pour le mouvement brownien issu de 0, en notant $\lambda(A) = \inf(\tilde{\lambda}(f),\ f \in A)$.

*<u>Théorème 5</u>* : <u>Soit</u> A <u>un borélien de</u> $C_o(\mathbb{R}^p)$,

$$-\lambda(\mathring{A}) \leq \underline{\lim}\ \varepsilon^2 \log P(\varepsilon\beta \in A) \leq \overline{\lim}\ \varepsilon^2 \log P(\varepsilon\beta \in A) \leq -\lambda(\overline{A}).$$

Voir Azencott [1], proposition 3.6.

Considérons maintenant une matrice $d \times p$ $\sigma$, soit $\Sigma = \sigma\sigma^*$ et Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^d$ définie par $Q(v) = \langle v, \Sigma v\rangle$ ; on définit la <u>forme quadratique conjuguée</u> $Q^*$ par :

(16) $\quad Q^*(v) = \inf\{|w|^2 \ ;\ w \text{ tel que } \sigma w = v\}$ ce qui équivaut à

(17) $\quad Q^*(v) = \sup\{2<t,v> - Q(t),\ t \in \mathbb{R}^d\}$.

Remarquons que $Q^*(v) \geq \frac{1}{\|\sigma\|^2} |v|^2$, que si $\Sigma$ est inversible, $Q^*(v) = <v,\Sigma^{-1}v>$ et que si $\sigma$ est $d \times d$ inversible $Q^*(v) = |\sigma^{-1}(v)|^2$.

On applique cela au champ de matrice $\sigma(x)$ et on définit,

(18) $\quad Q_x(v) = |\sigma\ (x)\cdot v|^2$,

et on note $Q_x^*(v)$ la forme quadratique conjuguée qui, vu (17) est s.c.i. en $(x,v)$ et convexe en $v$, notons que $Q_x^*(v) \geq \frac{1}{M} |v|^2$. Si on pose,

(19) $\quad \nu(x,v) = Q_x^*(v - b(x))$

$\nu(x,v)$ a les mêmes propriétés et de plus, $\nu(x,v) \geq \frac{1}{2M^2} |v|^2 - 1$.

Posons, pour $g \in C(\mathbb{R}^d)$,

(20) $\quad \lambda(g) = \frac{1}{2} \int_0^T \nu(g_t,g_t')dt$ si $g$ est a.c., $+\infty$ sinon.

On voit que $\{\lambda(g) \leq a\}$ implique $\int_0^T |g_t'|^2 dt \leq 2MT + 4aM^2$ d'où l'on peut déduire que $\{\lambda \leq a\}$ est un compact de $C_x(\mathbb{R}^d)$.

On a les propriétés suivantes (Azencott [1], Proposition 2.10).

*Proposition 6* : La fonctionnelle $\lambda$ est s.c.i sur $C(\mathbb{R}^d)$ et $\{g\ ;\ \lambda(g) \leq a,\ |g_o| \leq b\}$ est compact. De plus, pour, $g \in C_x(\mathbb{R}^d)$,

(21) $\quad \lambda(g) = \inf\{\tilde{\lambda}(f)\ ;\ f \in C_o(\mathbb{R}^d),\ g = B_x(f)\}$ – $B_x$ défini par (14) – l'inf étant atteint si $\lambda(g) < +\infty$. Enfin $B_x(\{\tilde{\lambda} \leq a\}) = \{\lambda \leq a\}$.

Remarque : Evidemment si $\sigma$ est $d \times d$ inversible,

$$\lambda(g) = \frac{1}{2} \int_0^T |\sigma^{-1}(g_t)\cdot(g_t' - b(g_t))|^2 dt.$$

Pour $\quad A \subset C(\mathbb{R}^d)$, on pose,

$$\Lambda(A) = \inf(\lambda g)\ ;\ g \in A)$$

et on peut énoncer.

*Théorème 7* : Sous les hypothèses (1), (2), $y^{\varepsilon}$ étant défini par (3), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $A$ borélien de $C_x(\mathbb{R}^d)$,

$$- \Lambda(\mathring{A}) \leq \underline{\lim}\, \varepsilon^2 \log P(y^{\varepsilon}(x) \in A) \leq \overline{\lim}\, \varepsilon^2 \log P(y^{\varepsilon}(x) \in A \leq - \Lambda(\overline{A}).$$

Démonstration : C'est celle du théorème 2.13 de [1] que nous reprenons pour la commodité du lecteur.

**Minoration** : On va montrer un résultat un peu plus général qui nous sera utile plus tard.

*Proposition 8* : Soit $g \in C(\mathbb{R}^d)$ telle que $\lambda(g) < + \infty$ et $g(0) = z$. Pour tout $\eta > 0$, $\rho > 0$, il existe $\varepsilon_o > 0$ et $r > 0$ tels que si $\varepsilon \leq \varepsilon_o$ et $|x-z| < r$,

$$\varepsilon^2 \log P\left[\|y^{\varepsilon}(x) - g\| < \rho\right] \geq - \lambda(g) - \eta.$$

Soit $f$ tel que $B_z(f) = g$ et $\lambda(g) = \tilde{\lambda}(f)$ – proposition 6 – et soit $R = \lambda(g) + \eta$, alors

$$P\left[\|y^{\varepsilon} - g\| < \rho\right] \geq P\left[\|\varepsilon\beta - f\| < \alpha\right] - P\left[\|y^{\varepsilon} - g\| > \rho,\ \|\varepsilon\beta - f\| < \alpha\right]$$

$$\geq P\left[\|\varepsilon\beta - f\| < \alpha\right] - \exp(- \frac{R}{\varepsilon^2}) \quad \text{si } \alpha \text{ est bien choisi et } |z-x| < r$$

– théorème 4 –.

Mais (théorème 5), si $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, $- \lambda(g) - \eta/_2 = - \tilde{\lambda}(f) - \eta/_2 \leq \varepsilon^2 \log P(\|\varepsilon\beta - f\| < \alpha)$ $\leq \varepsilon^2 \log 2 + \mathrm{Max}(\varepsilon^2 \log P(\|y^{\varepsilon} - g\| < \rho), - R)$ mais comme $R = \lambda(g) + \eta$ ce max ne peut être $- R$ d'où le résultat.

Ceci fait, soit maintenant $G$ un ouvert et $g \in G$ tel que $\lambda(g) < + \infty$, il existe $\rho > 0$ tel que $B(g,\rho) \subset G$ et donc, vu la proposition ci-dessus, $P\left[y^{\varepsilon} \in G\right] \geq P\left[\|y^{\varepsilon} - g\| < \rho\right]$ et $\underline{\lim}\, \varepsilon^2 \log P(y^{\varepsilon} \in G) \geq - \lambda(g)$ ; $g$ étant arbitraire, on a la minoration cherchée.

Majoration : Soit $A = F$ fermé. Si $\Lambda(F) = 0$ il n'y a rien à montrer. Sinon soit $a > 0$ tel que $a < \Lambda(F)$ et soit $R > a$. Si $K_a = \{\lambda \leq a\}$ et $C_a = \{\tilde{\lambda} \leq a\}$, $K_a = B_x(C_a)$ – proposition 6 –. Soit $f \in C_a$, $g = B_x(f) \in K_a$ donc $\lambda(g) \leq a < \Lambda(F)$ d'où $g \notin F$ et il existe donc $\rho_f > 0$ tel que $B_x(g,\rho_f) \subset F^c$.

De plus, on peut trouver (théorème 4) $\alpha_f > 0$, $\varepsilon_f > 0$ tels que $\varepsilon \leq \varepsilon_f$, on ait,

$$P\left[\|y^{\varepsilon} - g\| > \rho_f,\ \|\varepsilon\beta - f\| < \alpha_g\right] \leq \exp(- R/_{\varepsilon^2}).$$

Comme $C_a \subset \bigcup_{f \in C_a} B(f,\alpha_f)$, on peut trouver $f_1,\dots,f_n \in C_a$ telles que, notant $\alpha_k, \varepsilon_k, \rho_k, g_k$ pour $\alpha_{f_k}, \varepsilon_{f_k}, \rho_{f_k}, B_x(f_k)$, $C_a \subset \bigcup_1^n B(f_k,\alpha_k) = U$ ouvert et $F \subset B^c(g_k,\rho_k)$ pour tout $k$. On a alors,

$$\{\varepsilon\beta \in U\} \cap \{y^\varepsilon \in F\} = \bigcup_1^n \{\|\varepsilon\beta - f_k\| < \alpha_k,\ y^\varepsilon \in F\}$$

$$\subset \bigcup_1^n \{\|\varepsilon\beta - f_k\| < \alpha_k,\ \|y^\varepsilon - g_k\| > \rho_k\}$$

et donc $P[\varepsilon\beta \in U,\ y^\varepsilon \in F] \leq n \exp(- R/\varepsilon^2)$ si $\varepsilon = \varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n$.

Finalement $P[y^\varepsilon \in F] \leq P[\varepsilon\beta \in U,\ y^\varepsilon \in F] + P[\varepsilon\beta \in U^c]$ et

$\overline{\lim}\ \varepsilon^2 \log P(y^\varepsilon \in F) \leq \text{Max}(- R, \tilde{\lambda}(U^c)) \leq - a$ car $C_a \subset U$ et donc $\tilde{\lambda}(U^c) > 0$.

On aura aussi besoin de

*Proposition 9* : <u>Soit</u> $g \in C(\mathbb{R}^d)$ <u>tel que</u> $g(0) = z$. <u>Pour tout</u> $a < \lambda(g)$, <u>il existe</u> $\rho > 0$, $\varepsilon_o > 0$ <u>tels que si</u> $\varepsilon \leq \varepsilon_o$ <u>et</u> $|x-z| < \rho$, <u>alors</u>,

$$\varepsilon^2 \log P[\|y^\varepsilon(x) - g\| < \rho] \leq - a.$$

<u>Démonstration</u> : Comme $\lambda$ est s.c.i., il existe $\rho > 0$, $b \in ]a,\lambda(g)[$ tels que si $\|\psi - g\| < 3\rho$, on ait, $\lambda(\psi) > b$. Supposons $|x-z| < \rho$ et soit $\tilde{g}_t = g_t + (x-z)$, $\tilde{g}_o = x$ et $P[\|y^\varepsilon(x) - g\| < \rho] \leq P[\|y^\varepsilon(x) - \tilde{g}\| < 2\rho]$ et vu le théorème 7 il existe $\varepsilon_o > 0$ tel que si $\varepsilon \leq \varepsilon_o$, $\varepsilon^2 \log P[\|y^\varepsilon - \tilde{g}\| < 2\rho] \leq - \Lambda(\overline{B}(\tilde{g},2\rho)) + (b-a)$.

Mais si $\|\psi - \tilde{g}\| < 2\rho$, $\|\psi - g\| < 3\rho$ et donc $\lambda(\psi) > b$ donc $\Lambda(\overline{B}(\tilde{g},2\rho)) > b$ d'où le résultat.

3 - <u>Deuxième partie : Cas d'une variété</u>. $M$ désigne une variété connexe, à base dénombrable, de classe $C^2$, de dimension $d$. On se donne sur $M$ un opérateur semi-elliptique $\Delta$ vérifiant $\Delta 1 = 0$, de classe $C^o$. C'est un opérateur de $C^2(M)$ dans $C^o(M)$ qui s'écrit, si $(U,\phi)$ est une carte locale

$$\Delta_\phi = \frac{1}{2} \Sigma a^\phi_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \Sigma h^\phi_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

On fait l'hypothèse,

(H) il existe un atlas de $M$ formé de cartes $(U,\phi)$ telles que $a^\phi = \sigma^\phi \cdot (\sigma^\phi)^*$ avec $\sigma^\phi$ matrice rectangulaire et $\sigma^\phi$ et $h^\phi$ localement lipschitziens.

Soit $\partial$ le point à l'infini de $M$ - $\partial$ point isolé si $M$ est compacte - et $\overline{M} = M \cup \partial$ le compactifié d'Alexandrov ; on note $\mathcal{C}(M)$ l'ensemble des applications $f$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\overline{M}$, continues telles que $f(t) = \partial$ entraîne $f(t+h) = \partial$ pour tout $h$. Pour $f \in \mathcal{C}(M)$, on note $\tau(f) = \inf(t \geq 0,\ f(t) = \partial)$. $\mathcal{C}(M)$ désigne le sous-espace des $f$ telles que $\tau(f) = +\infty$. Donnons nous une suite de compacts $(K_r)$ telles que $K_1 \subset \overset{\circ}{K}_2 \subset K_2 \subset \ldots$ avec $\cup K_r = M$ et soit

$\tau^r(f) = \inf(t \geq 0,\ f(t) \notin K_r)$, et soit $\pi_r : \mathcal{C}(M) \to \mathcal{C}(M)$, $f \rightsquigarrow f^r$ où $f^r(t) = f(t \wedge \tau^r)$ ; on munit $\mathcal{C}(M)$ de la topologie limite projective des $\pi_r$. On voit facilement que $f_n \to f$ dans $\mathcal{C}(M)$ ssi $f_n \to f$ uniformément sur $[0,u]$ pour tout $u < \tau(f)$.

On fait le choix sur $M$ d'une distance riemannienne telle que $d(x,y) \to +\infty$ si $y \to \partial$ et on la prolonge à $\overline{M}$ par $d(x,\partial) = +\infty$. Alors pour $f,g \in \mathcal{C}(M)$, $0 \leq u < v$ on pose,

$$(22) \qquad d_{u,v}(f,g) = \sup\{d(f(t),g(t)) \ ;\ u \leq t \leq v\}.$$

Alors $V^u_\rho(f) = \{g \ ;\ d_{0,u}(f,g) < \rho\}$, $u < \tau(f)$, $\rho > 0$ forme une base de voisinage de $f$.

On définit de même $\mathcal{C}^T(M)$, $\mathcal{C}^T(M)$ pour les $f$ définies sur $[0,T]$ et $\mathcal{C}^T_x(M)$, $\mathcal{C}^T_x(M)$ pour les $f$ telles que $f(0) = x$. Evidemment $\mathcal{C}^T(M)$ désigne les applications continues de $[0,T]$ dans $M$ et non dans $\overline{M}$.

On se donne maintenant des champs de vecteurs $b_\varepsilon(x)$, $b(x)$ et on suppose.

(H') $b_\varepsilon$ et $b$ sont localement lipschitziens et $b_\varepsilon$ tend vers $b$ uniformément sur tout compact.

On définit l'opérateur $D_\varepsilon$ par :

$$(23) \qquad D_\varepsilon u = \langle b_\varepsilon, du\rangle + \varepsilon^2 \Delta u.$$

On appellera <u>bonne carte</u> une carte $(U,\phi)$ vérifiant :

(i) $U \subset \overline{U}$ compact $\subset V$ carte et pour tout $x,y \in U$, $0 < k \leq \dfrac{\|\phi(x)-\phi(y)\|}{d(x,y)} \leq k' < +\infty$

(ii) il existe $\tilde{\sigma}$, $\tilde{h}$, $\tilde{b}_\varepsilon$, $\tilde{b}$ uniformément lipschitziens, bornés sur $\mathbb{R}^d$ telles que $a^\phi = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}^*$, $h^\phi = \tilde{h}$, $\tilde{b}_\varepsilon = b^\phi_\varepsilon$ sur $\phi(U)$ et $\tilde{b}_\varepsilon \to \tilde{b}$ uniformément.

On construit facilement un atlas de bonnes cartes.

Alors sur ($\Omega = \mathcal{C}(M)$, $\underline{\underline{F}}_t, \underline{\underline{F}}$ tribus usuelles, $y_t(\omega) = \omega(t)$), il existe, pour $x \in M$, une unique probabilité $P^\varepsilon_x$, telle que $P^\varepsilon_x(y_0 = x) = 1$ et pour $f \in C^2_k$,

$$(24) \qquad f(y_t) - f(x) - \int_0^t D_\varepsilon(f(y_s)ds \quad \text{soit une} \quad (P_x^\varepsilon, \underline{\underline{F}}_t) \quad \text{martingale.}$$

On appellera le processus $X^\varepsilon = (\Omega, \underline{\underline{F}}_t, \underline{\underline{F}}, y_t, P_x^\varepsilon)$ la $D_\varepsilon$-diffusion - voir [3] par exemple -.

La propriété essentielle est la suivante ; si $(U,\phi)$ est une bonne carte et si $x \in U$, les processus, sur $\phi(U)$, $(\phi \circ y_t, P_x^\varepsilon)$ et $(y^\varepsilon ; P)$ tués à la sortie de $\phi(U)$ ont même loi ; $y^\varepsilon$ étant la solution de $dy_t^\varepsilon = (\tilde{b}^\varepsilon + \varepsilon\tilde{h})(y_t^\varepsilon)dt + \varepsilon\tilde{\sigma}(y_t^\varepsilon)d\beta_t^\varepsilon, y_o^\varepsilon = \phi(x)$ et $(\beta_t, P)$ un d-mouvement brownien.

Passons à la définition de la fonctionnelle $\lambda$. En chaque $x \in M$, l'opérateur $\Delta$ définit une forme quadratique $Q_x$ sur $T_x^*(M)$ de composantes $a^\phi$ dans la carte locale $(U,\phi)$. Vu (H), $Q_x$ est un champ de tenseurs localement lipschitzien. Alors la formule :

$$(25) \qquad Q_x^*(v) = \sup\{[2<v,w> - Q_x(w)] \ ; \ w \in T_x^*(M)\}, \ v \in T_x(M)$$

définit un champ de formes quadratiques (éventuellement infinies) sur $T_x(M)$ et $(x,v) \rightsquigarrow Q_x^*(v)$ est s.c.i. sur le fibré tangent. Pour tout cela, voir le cours d'Azencott ([1], V.2). On pose, pour $f \in \mathcal{C}(M)$,

$$(26) \qquad \nu(x,v) = Q_x^*(v-b(x)), \quad v \in T_x(M), \ x \in M,$$

$$(27) \qquad \lambda_{u,v}(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \displaystyle\int_{u\wedge\tau(f)}^{v\wedge\tau(f)} \nu(f_t, f_t')dt & \text{si } f \text{ est a.c.} \\ + \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

La chose importante est que si $v < \tau(f)$ et si $f([u,v]) \subset U$ bonne carte,

$$(28) \qquad \lambda_{u,v}(f) = \frac{1}{2}\int_u^v \nu^\phi\{f_t^\phi, (f_t^\phi)'\}dt \qquad \text{où } f^\phi = \phi o f \text{ et } \nu^\phi \text{ est définie par (19)}$$

relativement à $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{b}$.

On fixe $T > 0$ et on pose $\lambda = \lambda_{0,T}$, puis, pour $A \subset \mathcal{C}^T(M)$

$$(29) \qquad \Lambda(A) = \text{Inf}(\lambda(f) \ ; \ f \in A).$$

Nous voulons démontrer :

*Théorème 10 :* On suppose (H) et (H'). Alors la fonctionnelle $\lambda$ est s.c.i, $\{f \; ; \; \lambda(f) \leq a$ et $f_o \in \Gamma$ compact$\}$ est compact et pour tout $A$ borélien $\subset \mathcal{E}_x^T(M)$,

$$-\Lambda(\mathring{A}) \leq \underline{\lim}\, \varepsilon^2 \log P_x^\varepsilon(y \in A) \leq \overline{\lim}\, \varepsilon^2 \log P_x^\varepsilon(y \in A) \leq -\Lambda(\bar{A}).$$

Si la $D_\varepsilon$-diffusion a une durée de vie infinie, ce résultat est vrai dans $\mathcal{C}_x^T(M)$.

Remarques : L'hypothèse (H) est satisfaite dans les cas suivants (voir [2], III App)

(i) $\Delta$ est de classe $C^1$, elliptique.

(ii) $\Delta$ est de classe $C^2$.

(iii) $M = \mathbb{R}^d$ et $a = \sigma \cdot \sigma^*$ avec $\sigma$ localement lipschitzien.

La suite de ce travail est consacrée à la démonstration du théorème 10. Nous allons d'abord étendre les estimations obtenues dans $\mathbb{R}^d$ à un tube sur la variété.

Recollement des estimations : Soit $f \in \mathcal{E}(M)$ et $0 < u < v$ ; nous dirons que $(f,u,v)$ vérifie (P) si :

(i) $\tau(f) > v$,

(ii) pour tout $\eta > 0$, $\rho > 0$, il existe $\varepsilon_o > 0$ et $r > 0$ tels que si $\varepsilon \leq \varepsilon_o$,

$$d(f(u),x) < r, \quad \varepsilon^2 \log P_x^\varepsilon\Big[\sup_{t \leq v-u} d(y_t, f(u+t)) < \rho\Big] \geq -\lambda_{u,v}(f) - \eta,$$

(iii) pour tout $a$ tel que $a < \lambda_{u,v}(f)$, il existe $\varepsilon_o > 0$, $\rho > 0$, $r > 0$ tels que

$$\varepsilon \leq \varepsilon_o, \; d(f(u),x)) < r, \; \varepsilon^2 \log P_x^\varepsilon\Big[\sup_{t \leq v-u} d(y_t, f(u+t)) < \rho\Big] \leq -a.$$

Nous dirons également que $(f,u,v,\alpha) \subset U$, bonne carte, si toute $g \in \mathcal{E}(M)$ telle que $d_{u,v}(f,g) < \alpha$ vérifie $g([u,v]) \subset U$. Alors,

1er) Si $f([u,v]) \subset U$, bonne carte, $(f,u,v)$ vérifie (P). En effet on peut trouver $\alpha$ tel que $(f,u,v,\alpha) \subset U$ et (ii) et (iii) résultent des propositions 8 et 9 compte tenu du fait que pour $x,z \in U$, $0 < k \leq \dfrac{d(x,z)}{\|\phi(x)-\phi(z)\|} \leq k'$.

2è) Soit $0 \leq u < v < w$. Si $(f,u,v)$ et $(f,v,w)$ vérifient (P), $(f,u,w)$ aussi. On suppose $u = 0$. Soit $A = P_x^\varepsilon\Big[\sup_{t \leq w} d(y_t, f(t)) < \rho\Big]$

$$A = P_x^\varepsilon\Big[\sup_{t\leq v} d(y_t,f(t)) < \rho,\ \sup_{s\leq w-v} d(y_s o\theta_v,\ f(v+s)) < \rho\Big]$$

$$= E_x^\varepsilon\Big[P_{y_v}^\varepsilon\ (\sup_{s\leq w-v} d(y_s,f(v+s)) < \rho)\ ;\ \sup_{t\leq v} d(y_t,f(t)) < \rho\Big]$$

Il suffit d'établir (ii) pour $\rho$ petit. Comme $(f,v,w)$ vérifie (P), on peut trouver $r_1 > 0$ et $\varepsilon_1 > 0$ tel que si $\rho > r_1$ et $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, on ait,

$$A \geq \exp[-\lambda_{v,w}(f) - \eta/2]P_x^\varepsilon(\sup_{t\leq v} d(y_t,f(t)) < \rho)$$

$$\geq \exp[-\lambda_{v,w}(f) - \lambda_{o,v}(f) - \eta] \quad \text{si} \quad \varepsilon \leq \varepsilon_2 \quad \text{et} \quad |f(0) - x| < r_2,$$

$$\geq \exp[-\lambda_{o,w}(f) - \eta].$$

Soit maintenant $a < \lambda_{o,w}(f)$ et $a = a_1 + a_2$ avec $a_1 < \lambda_{o,v}(f)$, $a_2 < \lambda_{v,w}(f)$. Comme $(f,v,w)$ vérifie (P), on a pour $\rho < r_1$ et $\varepsilon \leq \varepsilon_1$,

$$A \leq \exp(-a_2)P_x^\varepsilon(\sup_{t\leq v} d(y_t,f(t)) < \rho) \leq \exp(-a_1-a_2)$$

si $\rho < \rho_2$, $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ et $|f(0) - x| < r_2$.

3è) Soit $t < \tau(f)$. Alors $(f,0,t)$ vérifie (P).

On peut trouver $\varepsilon_o > 0$ tel que $(f,0,\varepsilon_o,\alpha_o) \subset U_o$ bonne carte, puis pour tout $0 < u \leq t$, $\varepsilon(u)$, $\alpha(u)$, $U_u$ bonne carte tels que $(f,u-\varepsilon(u),u+\varepsilon(u),\alpha(u)) \subset U_u$ d'où, en recouvrant $[0,t]$, on construit $t_o = 0 < t_1 < t_2 <\ldots< t_n = t$, $\alpha > 0$ et $U_1,\ldots,U_n$ bonnes cartes telles que $(f,t_k,t_{k+1},\alpha) \subset U_k$. Alors les propriétés 1 et 2 ci-dessus montrent que $(f,0,t)$ vérifie (P). Notons que cette construction montre que $\lambda$ est s.c.i sur $\mathcal{E}^T(M)$. En effet soit $f \in \mathcal{E}^T(M)$ et $a < \lambda(f)$, il existe $t < \tau(f)$ tel que $\lambda_{o,t}(f) > \lambda(f) - \eta$, puis $\alpha_k$ tel que si $d_{t_k,t_{k+1}}(f,g) < \alpha_k$ alors $\lambda_{t_k,t_{k+1}}(g) > \lambda_{t_k,t_{k+1}}(f) - \eta/n$ d'où si $\bar{\alpha} = \inf \alpha_k$, $\lambda(g) > \lambda_{o,t}(g) > \lambda_{o,t}(f) - \eta > \lambda(f) - 2\eta$ pour tout $g$ tel que $d_{o,t}(f,g) < \bar{\alpha}$ qui est un voisinage de $f$ dans $\mathcal{E}^T(M)$.

Ceci fait, établissons la minoration.

*Proposition 11* : Soit $f \in \mathcal{C}_x^T(M)$, alors

(i) pour tout $\eta > 0$ et tout ouvert $V_f$ contenant $f$, il existe $\varepsilon_o > 0$ tel que si $\varepsilon \leq \varepsilon_o$,

$$\varepsilon^2 \log P_x^\varepsilon[y \in V_f] \geq -\lambda(f) - \eta$$

(ii) pour tout $a < \lambda(f)$, il existe un voisinage $V_f$ de $f$ et $\varepsilon_o$ tel que si $\varepsilon \leq \varepsilon_o$,

$$\varepsilon^2 \log P_x^\varepsilon[y \in V_f] \leq -a.$$

Démonstration :

(i) Si $V_f$ est un ouvert contenant $f$, il existe $t \leq T$, $t < \tau(f)$ et $\rho > 0$ tel que $V_f \supset \{g \; ; \; d_{o,t}(f,g) < \rho\}$ alors comme $(f,0,t)$ vérifie (P), on a pour $\varepsilon \leq \varepsilon_o$,

$$\varepsilon^2 \log P_x^\varepsilon(y \in V_f) \geq -\lambda_{o,t}(f) - \eta \geq -\lambda(f) - \eta.$$

(ii) Comme $\lambda_{o,t}(f) \uparrow \lambda(f)$ lorsque $t \uparrow T \wedge \tau(f)$, il existe $t < T \wedge \tau(f)$ tel que $a < \lambda_{o,t}(f)$, alors toujours par la propriété (P), il existe $\rho > 0$, $\varepsilon_o > 0$ tels que $V_f = \{g, d_{o,t}(f,g) < \rho\}$ vérifie $\varepsilon^2 \log P_x^\varepsilon(y \in V_f) \leq -a$.

La propriété (i) de cette proposition montre que si $G$ est un ouvert de $\mathcal{C}_x^T(M)$, alors pour tout $f \in G$, $\underline{\lim}\, \varepsilon^2 \log P_x^\varepsilon(y \in G) \geq -\lambda(f)$ et donc $\underline{\lim}\, \varepsilon^2 \log P_x^\varepsilon(y \in G) \geq -\Lambda(G)$. L'adaptation, dans le cas où la diffusion n'explose pas, à $\mathcal{C}_x^T(M)$ est immédiate.

Pour démontrer la majoration, on va utiliser

*Proposition 12* : Pour tout $R > 0$, $x \in M$, il existe un compact $H$ de $\mathcal{C}_x^T(M)$ et $\varepsilon_o$ tel que pour $\varepsilon \leq \varepsilon_o$, $\varepsilon^2 \log P_x^\varepsilon(y \notin H) \leq -R$.

Admettons pour le moment cette proposition qui sera établie au paragraphe 4. Soit alors $F$ un fermé de $\mathcal{C}_x^T(M)$ et $a < \Lambda(F)$. Soit $R > a$ et $H$ le compact de la proposition 12. A tout $f \in F$, on peut associer (proposition 11) un ouvert $V_f$ tel que $\varepsilon^2 \log P_x^\varepsilon(y \in V_f) < -a$. On recouvre $H \cap F$ par ces ouverts et on construit ainsi $f_1,\ldots,f_n$ tels que $H \cap F \subset \bigcup_1^n V_{f_k}$. Alors

$$P_x^\varepsilon(y \in F) \leq P_x^\varepsilon(y \in F \cap H) + P_x^\varepsilon(y \notin H) \leq \sum_1^n P_x^\varepsilon(y \in V_{f_k}) + P_x^\varepsilon(y \in H),$$

$$\overline{\lim}\, \varepsilon^2 \log P_x^\varepsilon(y \in F) \leq \mathrm{Max}(-a, -R) \leq -a.$$

Pour le cas $\mathcal{C}_x^T(M)$ il suffit de remarquer qu'un fermé de $\mathcal{E}_x^T(M)$ est un fermé de $\mathcal{E}_x^T(M)$.

Il reste à montrer que $\{\lambda \leq a\} \cap \{f_o \in \Gamma\}$ est compact. Soit donc $(f_n)$ telles que $\lambda(f_n) \leq a$ et $f_n(0) \to x$. Il suffit de montrer que, pour tout $r \in \underline{N}$, on peut trouver $(n')$ telle que $f^r_{n'}$ converge uniformément sur $[0,T]$. (Rappelons que $f^r(t) = f(t \wedge \tau_r(f))$ où $\tau_r(f) = \inf(t, f(t) \notin K_r)$ avec $\underset{r}{\cup} K_r = M$). En effet par le procédé diagonal, on construira $(n'')$ telle que $f^r_{n''}$ tende vers $f^r$ pour tout $r$ et donc dans $\mathcal{E}^T(M)$ et on conclut par la s.c.i de $\lambda$.

Donc $r$ fixé, soit $U_1, \ldots, U_n$ un recouvrement de $K_r$ par des bonnes cartes vérifiant :

(30) il existe $\rho > 0$ telle que si $x \in K$, $B(x,\rho) \subset U_q$ pour un $q$.

(31) les coefficients $\tilde{\sigma}, \tilde{b}, \tilde{b}^\varepsilon, \tilde{h}$ intervenant dans la définition d'une bonne carte sont (pour tout $q$) bornés par $M$.

(32) si $x,z \in U_q$, $0 < k < \dfrac{\|\phi_q(x)-\phi_q(z)\|}{d(x,z)} < \dfrac{1}{k}$.

Soit maintenant $f_n$ telle que $d(f_n(0),x) < \frac{\rho}{2}$ ; supposons $B(x,\rho) \subset (U_1,\phi_1)$ et soit $u < \tau_{U_1}(f_n)$, alors on a (dans $\mathbb{R}^d$), $\lambda^{\phi_1}_{o,u}(f_n o \phi_1) \leq a$ et donc (voir paragraphe 2).

(33) $$\int_0^u \|(f_n o\phi_1)'_s|^2 ds \leq C = 2M^2(T + 2a).$$

On en déduit facilement l'existence d'un $\tau > 0$ <u>ne dépendant que de</u> $\rho,M,k,a$ telle que $f_n([0,\tau]) \subset U_1$ et, de là, on construit une sous-suite, encore notée $f_n$, telle que $f_n$ tende vers $f$ uniformément sur $[0,\tau]$ et à fortiori $f^r_n$.

Alors $f^r_n(\tau) \to f(z)$ et supposons que $B(z,\rho) \subset (U_2,\phi_2)$. Soit $n$ telle que $d(z,f^r_n(\tau)) < \frac{\rho}{2}$ et $u$ tel que $\tau < u < \tau_{U_2}(f^r_n)$. Posons $v = \tau_r(f_n)$. Si $v \leq \tau$ alors $f^r_n(u) = f^r_n(\tau)$ ; si $u \geq v > \tau$, on a,

$$\lambda^{\phi_2}_{\tau,v}(f_n o\phi_2) \leq a \quad \text{et donc} \quad \int_\tau^v |(f_n o\phi_2)'_s|^2 ds \leq C.$$

Comme $f^r_n$ est constant après $v$, on a dans tous les cas,

(34) $$\int_\tau^u |(f^r_n o\phi_2)'_s|^2 ds \leq C,$$

donc $f_n([\tau,2\tau]) \subset U_2$ pour le même $\tau$ que ci-dessus et de là, on déduit l'existence d'une sous-suite encore notée $(f_n)$ telle que $f_n^r$ tende uniformément vers $f_r$ sur $[0,2\tau]$. Continuant ce procédé, on construit $f_{n'}$ telle que $f_{n'}^r$ converge uniformément vers $f_r$ sur $[0,T]$.

Remarque : On peut démontrer le théorème 7 lorsque $\sigma \cdot \sigma^*$ est inversible en remplaçant l'hypothèse $b_\varepsilon$ lipschitzien par $b_\varepsilon$ borélien borné (et toujours tendant uniformément vers $b$ lipschitzien). Il suffit pour cela de donner un sens faible à (3). Ceci permet dans le théorème 10 de remplacer lorsque $\Delta$ est elliptique l'hypothèse $h^\phi$ est localement lipschitzien, par $h^\phi$ borélien, localement borné.

4 - Démonstration de la proposition 12.

*Lemme 13* : Pour tout compact $K$ de $M$, il existe $\theta > 0$, $a > 0$, $b > 0$ tels que pour tout $\alpha > 0$, $u > 0$, $\varepsilon > 0$, $x \in K$, on ait, en désignant par $\tau_K$ le temps de sortie de $K$,

$$\log P_x^\varepsilon(\sup_{t \leq u} d(y_t,x) > \alpha,\ u < \tau_K) \leq a - \theta \frac{\alpha(\alpha-bu)}{u\varepsilon^2}.$$

Démonstration : On commence par recouvrir $K$ par un nombre fini de bonnes cartes $U_1,\dots,U_p$ vérifiant les conditions (30), (31), (32) ; le $k$ choisi dans la suite étant celui de (32).

On voit alors que si $x \in K$ et $\alpha < \rho$,

$$P_x^\varepsilon(\sup_{t \leq u} d(y_t,x) > \alpha) \leq P\left[\sup_{t \leq u} |y^\varepsilon(x) - x| > k\alpha\right] \leq 2\exp\left(-A\frac{\alpha(\alpha-Bu)}{u\varepsilon^2}\right)$$ pour des

constantes $A,B$ ne dépendent que de $M,k,d$. Dans le cas général,

$$P_x^\varepsilon(\sup_{t \leq u} d(y_t,x) > \alpha,\ u \leq \tau_K) \leq \sum_{p=0}^{r-1} P_x^\varepsilon\left(\sup_{\frac{k}{r} \leq u < \frac{k+1}{r}u} d(y_t,y_{\frac{k}{n}}) > \frac{\alpha}{r},\ u < \tau_K\right)$$

$$\leq r \sup_{z\in K} P_z^\varepsilon\left(\sup_{t \leq \frac{u}{r}} d(y_t,z) > \frac{\alpha}{r}\right) \leq r^d \exp\left(-A\frac{\alpha(\alpha-Bur)}{ru\,\varepsilon^2}\right).$$

Ceci si $\frac{\alpha}{r} < \rho$.

Mais, par ailleurs, si $\sup_{z\in K} d(z,K^c) = C$, on a que $P_x^\varepsilon(\quad) = 0$ dès que $\alpha > C$ ; on peut donc se limiter à $\alpha \leq C$ et on choisit alors $r$ tel que $\frac{C}{r} < \rho$, ce qui montre le lemme.

Revenons à la proposition. On suppose $T = 1$. Rappelons que l'on a choisi $K_1 \subset \overset{\circ}{K}_2 \subset K_2 \subset \dots$ avec $M = \cup K_n$ et poser $\tau_n(f) = \inf(t, f(t) \notin K_n)$. On définit alors pour toute suite de réels $k_n$ tels que $0 < k_n < +\infty$,

$$H(k_n) = \bigcap_n \bigcap_p \{f \; ; \; \sup\{d(f(t),f(s)) \; ; \; |t-s| < \frac{1}{2p}, \; s,t < \tau_n(f)\} \leq 2k_n p^{-1/4}\}$$

Vu la définition de la topologie de $\mathcal{C}^1(M)$, $H(k_n)$ est compact

$$H^c(k_n) \subset \bigcup_n \bigcup_p \bigcup_{k=0}^{p=1} \{\sup(d(f(t),f(s)) \; ; \; s,t \in \left[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}\right[, \; \frac{k+1}{p} < \tau_n(f)) > 2k_n p^{-1/4}\}$$

$$P_x^\varepsilon(H^c(k_n)) \leq \sum_n \sum_p p \sup_{z \in K_n} P_z^\varepsilon\left(\sup_{t \leq \frac{1}{p}} d(y_t, z) > k_n p^{-1/4}; \; \frac{1}{p} < \tau_n = \tau_{Kn}\right)$$

$$\leq \sum_n \sum_p p \exp(a_n - \frac{\theta_n k_n}{\varepsilon^2} (k_n p^{1/2} - b_n p^{-1/4})) \text{ - lemme 13 -.}$$

Supposons,

(35) $\quad \varepsilon \leq 1$ et $\theta_n k_n \geq 1$.

Alors,

$$\exp(\frac{\theta_n k_n}{2}) \sum_p p \exp(- \frac{\theta_n k_n}{\varepsilon^2} (k_n p^{1/2} - b_n p^{-1/4})) = \sum_p p \exp(- \frac{\theta_n k_n}{2} (k_n p^{1/2} - b_n p^{-1/4} - 1))$$

$$\leq \sum_p p \exp(- p^{1/2}) = C < +\infty, \text{ si on choisit}$$

(36) $\quad k_n \geq b_n + 2$ ; car $k_n p^{1/2} - b_n p^{-1/4} - 1 \geq (k_n - b_n - 1) p^{1/2}$ pour tout $p$.

Mais alors $\exp(\frac{2R}{\varepsilon^2}) P_x^\varepsilon(H^c(k_n)) \leq \sum_n C \exp(a_n - \frac{\theta_n \frac{k_n}{2} - 2R}{\varepsilon^2}) \leq C \sum_n \exp(-n) = C'$ en choisissant

(37) $\quad \varepsilon \leq 1$, $\theta_n k_n \geq 2R + n + a_n$.

Finalement $P_x^\varepsilon(H^c(k_n)) \leq C' \exp(- \frac{2R}{\varepsilon^2}) \leq \exp(- \frac{R}{\varepsilon^2})$ si $\varepsilon \leq \varepsilon_o$ et

$$k_n \geq \mathrm{Max}(b_n + 2, \frac{2R + n + a_n}{\theta_n})$$

*REFERENCES :*

[1] R. AZENCOTT : Grandes déviations et applications. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour VII-78. Lecture Notes in Math. Springer Verlag 1980.

[2] R.S. LIPTSER-A.N. SHYRYAYEV : Statistics of Random Processes I. Springer Verlag.

[3] P. PRIOURET : Diffusions et équations différentielles stochastiques. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour III-73. Lecture Notes in Math. Springer Verlag (390).

[4] A.D. VENTSEL-M.I. FREIDLIN : On small random perturbations of dynamical systems. Russian Math. Surveys 25 (1970) p. 1-55.

Remarque : On a établi le théorème 10 pour les diffusions $y^\varepsilon$ sur M en recollant les estimations obtenues à l'aide du théorème 4 pour $M = \mathbb{R}^d$. Or on sait (voir par exemple le livre de Ikeda - Watanabe Ch. V th. 1.1) qu'on peut obtenir la diffusion $y^\varepsilon$ comme image d'un brownien d-dimensionnel. On peut donc songer à démontrer le théorème 10 en étendant le théorème 4 à une variété ; ceci par des méthodes proches de celles du paragraphe 3. Cependant la méthode consistant à recoller les estimations est un peu plus générale ; elle permet par exemple de traiter le cas où $y^\varepsilon$ est de générateur $\varepsilon^2\Delta + b_\varepsilon$ avec $\Delta$ elliptique et $b^\varepsilon$ borélien tendant vers b régulier - voir la remarque à la fin du paragraphe 3 -