MICHEL TALAGRAND

Sur les résultats de Feyel concernant les épaisseurs

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__1_0>

SUR LES RESULTATS DE FEYEL CONCERNANT LES EPAISSEURS

Michel TALAGRAND

0 - *INTRODUCTION.*

Soit K un compact, que l'on supposera métrisable, ce cas étant seul envisagé ici. On renvoie à [1] pour les définitions concernant les capacités. Pour une capacité C, on définit son épaisseur :

$$e(C) = \operatorname{Sup}\{\alpha \ ; \text{ il existe une famille } (A_i)_{i\in I} \text{ non dénombrable de compacts disjoints telle que pour } i \in I,\ C(A_i) \geq \alpha\}.$$

On dénote par $\mathcal{C}_K$ l'ensemble des capacités C sur K telles que $C(K) \leq 1$. Feyel [3] montre que si (Ω,Σ,μ) est un espace mesuré, et $\phi : \Sigma \to \mathcal{C}_K$ est mesurable, alors $e\circ\phi$ est mesurable, et que si pour tout ω, $\phi(\omega)$ est alternée d'ordre deux, alors $\int e(\phi(\omega))d\mu(\omega)=e(\int\phi(\omega)d\mu(\omega))$. Toute capacité alternée d'ordre deux est sup des mesures qu'elle domine. On va montrer d'abord que le résultat de Feyel ne s'étend pas si on suppose seulement que chaque $\phi(\omega)$ est sup de mesures. On donnera ensuite une démonstration "probabiliste" du résultat de Feyel, basée sur les idées de [3] et qui permettra de l'étendre à un cadre un peu plus général.

I - *UN EXEMPLE.*

On désigne par K l'ensemble de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, et par λ sa mesure canonique.

Théorème 1 : <u>Il existe un espace compact Ω, une probabilité μ sur Ω, et une application continue ϕ de Ω dans $\mathcal{C}_K$, avec $\phi(\omega)(K) = 1 = e(\phi(\omega))$ pour $\omega\in\Omega$, et telle que la capacité $C = \int\phi(\omega)d\mu(\omega)$ soit absolument continue par rapport à λ. Autrement dit, on a</u>

$$\forall\varepsilon,\ \exists\alpha,\quad \lambda(A) \leq \alpha \Longrightarrow C(A) \leq \varepsilon \qquad \forall A \text{ compact}.$$

<u>Preuve</u> : Ecrivons $\mathbb{N} = \cup I_n$, où les I_n sont disjoints et $\operatorname{card} I_n = 2^{6n+3}$. Soit $\Omega = \prod_n I_n$, muni de la mesure canonique μ. Pour $\omega = (i(n))_n \in \Omega$, $u\in K$, soit

$$K(\omega,u) = \{z\in K \ ; \ z(i(n)) = u(n)\}$$

et soit $\mu(\omega,u)$ la mesure naturelle sur $K(\omega,u)$.

Posons $\phi(\omega) = \operatorname{Sup}_{u\in K} \mu(\omega,u)$. Il est clair que l'application $\omega \to \phi(\omega)$ est continue. D'autre part, pour $u\in K$, $\phi(\omega)(K(\omega,u)) = 1$, donc $e(\phi(\omega)) = 1$ puisque $u \neq u' \Longrightarrow K(\omega,u)\cap K(\omega,u') = \emptyset$.

Posons $C = \int \phi(\omega)\, d\mu(\omega)$. On va montrer que pour tout ensemble ouvert-fermé A de K, on a pour tout p

$$C(A) \leq 2^{-p} + 2^{p}\, \lambda(A). \qquad (1)$$

ce qui suffira, car alors $\lambda(A) \leq 2^{-2p} \Longrightarrow C(A) \leq 2^{-p+1}$.

Pour tout entier n, et $v \in K_n = \{0,1\}^n$, $\omega = (i(n)) \in \Omega$, soit

$$K_n(\omega,v) = \{z \in K \ ; \ \forall p \leq n, \ \ z(i(p)) = v(p)\}$$

et $\mu_n(\omega,v)$ la mesure naturelle de $K_n(\omega,v)$.

Soit m un entier tel que A ne dépende que des coordonnées dans $\bigcup_{p \leq m} I_p$. On va prouver par induction <u>décroissante</u> sur n que pour $n \leq m$, on a

$$C(A) \leq 2^{-n} + \int_\Omega \sup_{v \in K_n} \mu_n(\omega,v)\ (A)\ d\mu(\omega) \ . \qquad (2)$$

Puisque $\mu_n(\omega,v)\ (A) \leq 2^n\, \lambda(A)$, ceci implique (1).

Pour $n = m$, alors (2) découle du fait aisément vérifié que

$$\phi(\omega)\ (A) = \sup_{v \in K_m} \mu_m(\omega,v)\ (A).$$

On peut donc supposer (2) établie au rang n. Il existe une fonction mesurable $\omega \to v(\omega)$ de Ω dans K_n telle que :

$$\sup_{v \in K_n} \mu_n(\omega,v)\ (A) = \mu_n(\omega,v(\omega))(A).$$

Pour $u \in K_n$, on pose $H_u = v^{-1}(\{u\})$. Désignons par u' la projection de u dans K_{n-1}. Puisque

$$\mu_{n-1}(\omega,u')\ (A) \leq \sup_{w \in K_{n-1}} \mu_{n-1}(\omega,w)\ (A)$$

et que $\operatorname{card} K_n \leq 2^n$, il suffit de montrer que

$$E = \int_{\omega \in H_u} \mu_n(\omega,u)(A)\ d\mu(\omega) \leq 2^{-2n} + \frac{1}{2} \int_{\omega \in H_u} \mu_{n-1}(\omega,u')(A)\ d\mu(\omega). \qquad (3)$$

On fixe désormais μ. Soient $\Omega_1 = \prod_{p \leq n} I_p$, ν_1 sa mesure canonique, et p_1 la projection de Ω sur Ω_1. Il est clair que $K_n(\omega,u)$ ne dépend que de $p_1(\omega)$, et que l'on a pu choisir la fonction $v \to v(\omega)$ de sorte qu'il en soit de même de H_u. Avec des abus de notations évidents, on a donc en considérant que $H_u \subset \Omega_1$,

$$E = \int_{\eta \in H_u} \mu_n(\eta,u)\ (A)\ d\nu_1(\eta) \ .$$

Soient p la projection de Ω_1 sur $\Omega_2 = \prod_{p\leq n-1} I_p$, et, pour $\xi \in \Omega_2$, soit $h(\xi) = \mathrm{card}(p^{-1}(\xi) \cap H_u)$. Posons :

$$B = \{\eta \in \Omega_1 \ ; \ h(p(\eta)) \leq 2^{4n+2}\} .$$

Puisque $\mathrm{card}\ I_n = 2^{6n+3}$, il est clair que l'on a $\nu_1(H_u \cap B) \leq 2^{-2n-1}$, donc

$$\int_{\eta\in H_u\cap B} \mu_n(\eta,u)\ (A)\ d\nu_1(\eta) \leq 2^{-2n-1} .$$

Si ν_2 est la mesure canonique de Ω_2, on a

$$\int_{\eta\in H_u\cap B^c} \mu_n(\eta,u)\ (A)\ d\nu_1(\eta) = \int_{\xi\in p(B^c)} g(\xi)\ d\nu_2(\xi)$$

où l'on a posé

$$g(\xi) = (\mathrm{card}\ I_n)^{-1} \sum_{p(\eta)=\xi} \mu_n(\eta,u)\ (A) .$$

Pour établir (3), il suffit de montrer que pour tout ξ fixé dans Ω_2,

$$g(\xi) \leq (\mathrm{card}\ I_n)^{-1}\ h(\xi)\ \mu_{n-1}(\xi,u')\ (A) + 2^{-2n-1} . \tag{4}$$

En effet, on aura alors

$$\int_{\xi\in p(B^c)} g(\xi)\ d\nu_2(\xi) \leq 2^{-2n-1} + \int_{\xi\in p(B^c)} (\mathrm{card}\ I_n)^{-1}\ h(\xi)\mu_{n-1}(\xi,u')(A)\ d\nu_2(\xi)$$

$$= 2^{-2n-1} + \int_{\eta\in H_u\cap B^c} \mu_{n-1}(\eta,u')\ (A)\ d\nu_1(\eta)$$

puisque $\mu_{n-1}(\eta,u')$ ne dépend que de $p(\eta)$.

Pour $i \in I_n$, soit $G_i = \{z \in K_{n-1}(\xi,u') \ ; \ z(i) = u(n)\}$. Il est clair que si $p(\eta) = \xi$, on a

$$\mu_n(\eta,u)\ (A) = 2\ \mu_{n-1}(\xi,u')\ (A \cap G_{\eta(n)}) .$$

Pour établir (4), il suffit donc de montrer que si $J \subset I_n$ est un ensemble de cardinal $a \geq 2^{4n+2}$ on a

$$\frac{2}{a} \sum_{i\in J} \theta(A \cap G_i) \leq \theta(A) + 2^{-2n-1}$$

où l'on a posé pour simplifier $\theta = \mu_{n-1}(\xi,u')$.

Or, les ensembles G_i sont indépendants pour θ, et de mesure $\frac{1}{2}$. On a donc

$$\left(\int \left|\frac{1}{a} \sum_{i\in J} \chi_{G_i} - \frac{1}{2}\right| d\theta\right)^2 \leq \int \left|\frac{1}{a} \sum_{i\in J} \chi_{G_i} - \frac{1}{2}\right|^2 d\theta = \frac{1}{4a}.$$

Ainsi

$$\left|\frac{2}{a}\sum_{i\in J}\theta(A\cap G_i)-\theta(A)\right|\leq 2\int_A\left|\frac{1}{a}\sum_{i\in J}\chi_{G_i}-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{a}}$$

ce qui suffit.

II - CAPACITES ETALANTES.

On suppose ici que le compact de base est l'ensemble de Cantor $K=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On note $\mathcal{A}_n$ l'algèbre engendrée par les n premières coordonnées.

On dit que $\mathcal{A}_n$ sépare deux fermés L_1 et L_2 de K s'il existe $A\in\mathcal{A}_n$ avec $L_1\subset A$, $L_2\subset A^c$.

On appelle μ_n la probabilité sur $\mathcal{A}_n$ donnant masse 2^{-2^n} à chaque point.

Définition 2 : Une capacité C sur K sera dite étalante si elle vérifie la propriété suivante :

"$\forall\varepsilon>0$, $\exists m\in\mathbb{N}$, pour toute famille $A_1,\dots,A_m$ de sous-compacts disjoints de K, et tout n tel que $\mathcal{A}_n$ sépare les A_i, on a

$$\int_{A\in\mathcal{A}_n} C\big(\big(\bigcup_{i\leq m}A_i\big)\cap A\big)\,d\mu_n(A)\geq\inf_{i\leq m}C(A_i)-\varepsilon". \tag{5}$$

La preuve de l'assertion suivante est aisée et laissée au lecteur :

Exemple 3 : Pour $k\in\mathbb{N}$, la capacité sur C donnée par $C(A)=0$ si $\operatorname{card}A\leq k-1$, $\operatorname{card}A=1$ sinon, est étalante, et n'est pas sup de mesures si $k>1$.

Proposition 4 : Toute capacité alternée d'ordre 2 est étalante.

On va montrer plus précisément que si $A_1,\dots,A_m$ est une famille de compacts de K séparés par $\mathcal{A}_n$, et si $\forall i\leq m$, $C(A_i)\geq\gamma$, on a

$$\int_{A\in\mathcal{A}_n} C\big(\big(\bigcup_{i\leq m}A_i\big)\cap A\big)\,d\mu_n(A)\geq\gamma(1-2^{-m}). \tag{6}$$

La preuve s'effectue par induction sur m. C'est évident pour $m=0$. Supposons donc (6) établie pour $m-1$. Soit $E\in\mathcal{A}_n$, avec $A_m\subset E$, $A_i\cap E=\emptyset$ pour $i<m$. Pour $A\in E$, soit $\tilde{A}=(A\cap E^c)\cup(E\setminus A)$. Pour tout $A\in\mathcal{A}_n$, on a en posant $B=\bigcup_{i\leq m}A_i$, $B'=\bigcup_{i<m}A_i$:

$$C(A\cap B)+C(\tilde{A}\cap B)\geq C((A\cup\tilde{A})\cap B)+C(A\cap\tilde{A}\cap B)\geq C(A_m)+C(A\cap B').$$

Puisque A et $\tilde{A}$ ont même loi, on en déduit

$$2 \int_{\mathcal{A}_n} C(B \cap A)\, d\mu_n(A) \geq \gamma + \int_{\mathcal{A}_n} C(A \cap B')\, d\mu_n(A) \geq \gamma + \gamma(1-2^{-m-1})$$

d'après l'hypothèse de récurrence, et ceci est le résultat cherché.

Théorème 5 : Soit (Ω,Σ,μ) un espace mesuré complet et $\omega \to \phi(\omega)$ une application mesurable de Ω dans $\mathcal{E}_K$. Supposons que pour chaque $\omega, \phi(\omega)$ soit étalante, et soit $C = \int \phi(\omega)\, d\mu(\omega)$. Alors $e(C) = \int e(\phi(\omega))\, d\mu(\omega)$.

Preuve : Nous n'allons pas expliquer en détail pourquoi la construction qui va suivre peut s'effectuer de façon mesurable. Ce serait fastidieux, et cela n'utilise pas d'idée nouvelle. Le point essentiel est que si pour une capacité C il existe une famille non dénombrable $(K_i)_{i \in I}$ de compacts disjoints telle que $C(K_i) \geq \alpha$ $\forall i \in I$, alors il existe une telle famille indexée continuement par l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ [2].

Soit $\eta > 0$, et soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts de K, muni de la topologie usuelle. On va, par induction sur n, construire des suites $m(n)$ et $k(n)$ d'entiers, des ensembles mesurables décroissants E_n, des fonctions mesurables $\omega \to L(\omega,n) \in \mathcal{K}$, de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées, pour tout n et $\omega \in E_n$

$$\phi(\omega)\ (L(\omega,1)) \geq e(\phi(\omega)) - \frac{\eta}{2} \tag{7}$$

$$\forall B \in \mathcal{A}_{k(n-1)}, \quad \forall \omega \in E_n$$

$$\mu_n(\{A \in \mathcal{A}_{k(n)}\ ;\ \phi(\omega)\ (L(\omega,n) \cap A \cap B) \leq \phi(\omega)\ (L(\omega,n-1) \cap B) - \eta 2^{-n-1}\}) \leq \eta 2^{-2n-1} \tag{8}$$

"Il existe une famille $(K_i)_{i \in I}$ non dénombrable, de compacts disjoints de K, tels que la restriction de ϕ à $L(\omega,n)$ soit point de condensation des restrictions de ϕ aux K_i". (9)

$$\mu(E_{n-1} \setminus E_n) \leq \eta 2^{-n}, \quad E_0 = \Omega\ . \tag{10}$$

Le démarrage ne posant pas de difficultés, supposons tous ces objets construits an rang n. Pour $\omega \in E_n$, soit $m(\omega)$ le plus petit entier tel que $\phi(\omega)$ satisfasse (5) avec $\varepsilon = \eta^2\, 2^{-3n-4}$. C'est une fonction mesurable. On peut donc trouver $m(n+1)$ assez grand pour que

$$\mu(\{\omega \in E_n\ ;\ m(\omega) \geq m(n+1)\}) \leq \eta\ 2^{-n-2}.$$

Il existe un voisinage $V(\omega)$ de $L(\omega,n)$ tel que pour tout $B \in \mathcal{A}_{k(n)}$ on ait

$$\phi(\omega)\ (V(\omega) \cap B) \leq \phi(\omega)\ (L(\omega,n) \cap B) + \eta^2\ 2^{-3n-3}$$

et l'on peut supposer $\omega \to V(\omega)$ mesurable. D'après (9), pour chaque ω existe donc une famille non dénombrable $(K_i)_{i\in I}$ de compacts disjoints de $V(\omega)$ tels que

$$\forall i,\quad \forall B \in \mathcal{A}_{k(n)},\quad \phi(\omega)\ (L(\omega,n)\cap B) - \eta^2\, 2^{-3n-4} \le \phi(\omega)\ (K(\omega,i)\cap B)\,.$$

Ecrivant $I = J \times [1,m(n+1)]$ et $L_j = \bigcup_{p\le m(n+1)} K(j,p)$, on voit que les restrictions de ϕ à L_j ont des points de condensation. On peut ainsi trouver $m(n+1)$ applications mesurables $\omega \to K(\omega,i)$ de Ω dans $\mathcal{K}$, qui vérifient les conditions suivantes, où l'on pose $L(\omega,n+1) = \bigcup_{i\le m(n+1)} K(\omega,i)$:

(11) L'analogue de (9).

(12) Les compacts $(K(\omega,i))_{i\le m(n+1)}$ sont 2 à 2 disjoints.

(13) Pour $B \in \mathcal{A}_{k(n)}$, $i \le m(n+1)$

$$\phi(\omega)(L(\omega,n)\cap B) - \eta^2\, 2^{-3n-4} \le \phi(\omega)(K(\omega,i)\cap B) \le$$

$$\phi(\omega)(L(\omega,n+1)\cap B) \le \phi(\omega)(L(\omega,n)\cap B) + \eta^2\, 2^{-3n-3}.$$

Il existe alors $k(n+1)$ tel que si on pose $E_{n+1} = \{\omega \in E_n\ ;\ m(\omega) \le m(n+1)$ et $\mathcal{A}_{k(n+1)}$ sépare les $K(\omega,i),\ i \le m(n+1)\}$ on ait $\mu(E_n \setminus E_{n+1}) \le \eta 2^{-n-1}$. Pour tout ω on pose $L(\omega,n+1) = \bigcup_{i\le m(n+1)} K(\omega,i)$. Puisque (10) et (11) sont vérifiées par construction, seule est à vérifier (8). Or, puisque $\phi(\omega)$ est étalante, pour tout $A \in \mathcal{A}_{k(n)}$ on a

$$\int \phi(\omega)\ (L(\omega,n+1)\cap A\cap B)\,d\mu_{n+1}(B) \ge \phi(\omega)(L(\omega,n)\cap A) - \eta^2\, 2^{-3n-3}$$

d'après (14) et (5), et aussi $\phi(\omega)(L(\omega,n+1)\cap A\cap B) \le \phi(\omega)(L(\omega,n)\cap A) + \eta^2\, 2^{-3n-3}$ toujours d'après (14), ce qui implique (10) par un calcul facile, et termine la construction.

Soit $\Gamma = \Pi\mathcal{A}_{k(n)}$, muni de la mesure canonique ν produit des $\mu_{k(n)}$. Pour $\gamma \in \Gamma$, et $u \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, soit $A_n(\gamma,u) = \bigcap_{i\le n} u(i)\ \gamma(i)$, ou pour $A \in \mathcal{A}_i$, $\varepsilon A = A$ si $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon A = K\setminus A$ si $\varepsilon = -1$.

Fixons $\omega \in E = \cap E_n$. On montre par induction sur n que si on pose

$$F_n(\omega) = \{\gamma \in \Gamma\ ;\ \forall u \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}},\ \phi(\omega)(A_n(\gamma,u)) \ge e(\phi(\omega)) - \eta(1-2^{-n-1})\}$$

on a

$$\nu(F_n(\omega)) \ge 1 - \eta(1 - 2^{-n}).$$

Pour $n = 0$, ceci n'est autre que (7), et le pas général de l'induction se fait sans peine à l'aide de (8), compte tenu qu'il y a 2^n ensembles de la forme $A_n(\gamma,u)$.

Ainsi, si $F(\omega) = \bigcap_n F_n(\omega)$, on a $\nu(F(\omega)) \geq 1-\eta$. Le théorème de Fubini montre qu'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que si on pose $H_\gamma = \{\omega \in E \; ; \; \gamma \in F(\omega)\}$

$$\mu(H_\gamma) \geq \mu(E) - \eta \geq 1-2\eta .$$

Pour ce γ, et pour $u \in \{-1,1\}^n$, on a

$$C(A_n(\gamma,u)) \geq \int_{\omega\in H_\gamma} \phi(\omega)(A_n(\gamma,u)d\mu(\omega) \geq \int_{\omega\in H_\gamma} (e(\phi(\omega)) - \eta)d\mu(\omega)$$

$$\geq \int e(\phi(\omega))\, d\mu(\omega) - 3\eta .$$

Ceci est vrai pour chaque n, et ainsi si on pose $A(u) = \bigcap_n A_n(\gamma,u)$, on a $C(A(u)) \geq \int e(\phi(\omega))\, d\mu(\omega) - 3\eta$. Puisque les $A(u)$ sont disjoints pour $u \neq u'$, et que η est arbitraire, on a montré que

$$e(C) \geq \int e(\phi(\omega))\, d\mu(\omega).$$

L'inégalité inverse est bien plus facile (aucune hypothèse sur les $\phi(\omega)$ n'étant nécessaire) et est laissée au lecteur, ce qui conclut la preuve du théorème.

Remarque : Le théorème 5 implique le résultat de Feyel sur tout compact, car il est facile de montrer que pour une capacité C sur L, on a $e(C) = \sup e(C_{|K})$ pour K homéomorphe à l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] G. CHOQUET : Theorie of capacities, Ann. Int. Fourier 5, 1955, 131-295.

[2] C. DELLACHERIE : Capacités et processus stochastiques. Springer Verlag, 1972.

[3] D. FEYEL : A paraître.

[4] M. TALAGRAND : Sur deux résultats de Mokobodski concernant les ensembles à coupes dénombrables, à paraître.

Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Paris VI
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05