ARE UPPMAN

Un théorème de Helly pour les surmartingales fortes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 285-297
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__285_0>

UN THEOREME DE HELLY POUR LES SURMARTINGALES FORTES

par Are Uppman

Le but de cette étude est de démontrer pour les surmartingales fortes optionnelles sur $[0,\infty]$ un analogue au théorème de Helly classique dont voici un énoncé:

> Soit (f_n) une suite de fonctions positives, croissantes sur $[0,\infty]$ telle que $\sup_n f_n(\infty) < +\infty$. Alors il existe une suite (f_{n_k}) extraite de (f_n) et une fonction f croissante sur $[0,\infty]$ telles que (f_{n_k})converge simplement vers f sur $[0,\infty]$.

Le théorème de Helly, on le voit, énonce une propriété de compacité relative séquentielle sur un certain espace de fonctions muni de la topologie de la convergence simple. C'est pourquoi le théorème de Helly démontré ci-dessous s'inscrit naturellement dans une étude plus générale des parties relativement compacts de certains espaces de processus munis d'une topologie de convergence simple. En particulier nous démontrons (théorème 6) le résultat suivant:

> Soit H une partie uniformément de la classe (D) de l'espace des surmartingales fortes optionnelles sur $[0,\infty]$ muni de la topologie suivante: une suite généralisée X^i converge vers X ssi pour tout t.a. T X_T^i converge faiblement vers X_T dans L^1. Alors H est relativement compact et tout point adhérent à H est limite d'une suite dans H.

Mokobodzki a démontré un résultat analogue en théorie du potentiel pour les fonctions fortement surmédianes uniformement bornées (voir [3]) - et dont le nôtre peut sans doute en partie être déduit - en utilisant un théorème très fin d'analyse. Pour replacer certaines parties de notre étude dans un contexte beaucoup plus général , il convient également de consulter l'article de C. Dellacherie et E. Lenglart [1] sur les problèmes de régularisation etc. en théorie des martingales.

Je tiens ici à remercier plus particulièrement C. Dellacherie de m'avoir indiqué le sujet de cette étude.

NOTATIONS, RAPPELS.

Tous les processus considérés sont définis sur un même espace filtré $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P), t \in [0,\infty]$, vérifiant les conditions habituelles. Le signe $=$ entre deux processus indique qu'ils sont indistinguables.

L'ensemble des t.a. sur $[0,\infty]$ est noté $\mathbb{T}$.

Un processus A est croissant si p.s. $t \mapsto A_t(\omega)$ est une fonction croissante; on note $\mathbb{A}$ l'ensemble des processus positifs, croissants, adaptés avec A_∞ intégrable (non nécessairement c. à d.).

Un processus optionnel, réel X est une surmartingale forte optionnelle sur $[0,\infty]$ si

1) $\forall T \in \mathbb{T}$ X_T est intégrable
2) $\forall S,T \in \mathbb{T}$, $S \leq T$ implique $X_S \geq E[X_T|\mathcal{F}_S]$ p.s.

Rappelons qu'une surmartingale cadlag sur $[0,\infty]$ est une surmartingale forte optionnelle sur $[0,\infty]$, mais, même sous les conditions habituelles, il existe de nombreuses surmartingales fortes optionnelles non cadlag (seulement ladlag). C'est le cas de la projection optionnelle d'un processus décroissant non nécessairement continu à droite. D'ailleurs, inversement, toute surmartingale forte optionnelle sur $[0,\infty]$ de la classe (D) (i.e. telle que la famille $(X_T, T \in \mathbb{T})$ soit uniformement intégrable) admet une décomposition de Mertens (voir [2], appendice 1) $X = M - A - B_-$ où A est croissant, prévisible, cadlag avec $A_0=0$ et eventuellement $A_{\infty-} \neq A_\infty$, B est croissant, optionnel, cadlag avec $B_{\infty-} = B_\infty$ et éventuellement $B_0 \neq 0$, A_∞ et B_∞ étant intégrables, et où M est une martingale forte de la classe (D) i.e. (sous les conditions habituelles, adoptées ici) M est la version cadlag de $E[M_\infty|\mathcal{F}_t]$. On voit que si l'on pose $V = A + B_-$ on obtient la représentation

$$\forall T \in \mathbb{T} \quad E[X_T - X_\infty|\mathcal{F}_T] = E[V_\infty - V_T|\mathcal{F}_T] \qquad \text{p.s.}$$

unique si V est prévisible nul en 0.

L'ensemble des surmartingales fortes optionnelles sur $[0,\infty]$ sera noté $\mathbb{S}$.

Nous dirons qu'un processus X est totalement intégrable si pour tout T de $\mathbb{T}$ X_T est intégrable. Si X est totalement intégrable, il peut être identifié à un élément de $(L^1)^{\mathbb{T}}$, et dans la suite cet ensemble sera muni de la topologie produit obtenue à partir de la topologie faible $\sigma(L^1,L^\infty)$ sur L^1. La topologie induite sur la partie de $(L^1)^{\mathbb{T}}$ constituée des processus totalement intégrables sera appelée la topologie faible des processus totalement intégrables. Une suite généralisée X^i de processus totalement intégrables converge donc vers le processus t.i. X au sens de cette topologie ssi pour tout T de $\mathbb{T}$ $\lim_i X^i_T = X_T$ pour $\sigma(L^1,L^\infty)$.

Nous nous servirons abondamment de la propriété suivante: soit A un processus croissant, ladlag, adapté; alors il existe un ensemble dénombrable Θ de t.a. épuisant tous les temps de saut de A, le processus des sauts de A etant défini ici par $\Delta A = A_+ - A_-$. (Considérer la suite double de t.a. (T_{nk}) définie par $T_{no}=0$ et pour $k>0$ $T_{nk} = \inf\{t>T_{nk-1} : 1/n+1 < A_{t+} - A_{t-} \leq 1/n\}$ où l'on convient que $A_{0-}=0$, $1/0=+\infty$, et $\inf\emptyset = +\infty$).

Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à l'excellent livre de C. Dellacherie et P.A. Meyer [2].

ETUDE DES PARTIES RELATIVEMENT COMPACTES DE $\mathbb{A}$.

Ci-après (A^i) désigne une suite généralisée dans $\mathbb{A}$.

En un premier temps (lemmes 1, 2 et 3) on cherche à montrer que la limite éventuelle de (A^i) au sens de la topologie des processus t.i. est déterminée par le comportement de A^i_T pour T appartenant seulement à un ensemble dénombrable judicieusement choisi.

LEMME 1

Soit Θ une partie dénombrable de $\mathbb{T}$. Si pour tout T dans Θ A^i_T converge faiblement vers une limite $A_{(T)}$, alors on a pour presque tout ω

$$\forall S,T \in \Theta \quad S(\omega)\leq T(\omega) \Rightarrow A_{(S)}(\omega)\leq A_{(T)}(\omega)$$

Démonstration

Pour chaque couple $S\leq T$ de Θ on a pour tout $B\in\mathcal{F}_\infty$:

$$\int 1_B(A_{(T)} - A_{(S)})dP = \lim_i \int 1_B(A^i_T - A^i_S)\, dP$$

et par consequent $A_{(T)} - A_{(S)} \geq 0$ p.s. sur $\{S\leq T\}$. Comme Θ est dénombrable, le lemme est démontré.

LEMME 2

Supposons que pour tout T dans $\mathbb{T}$ A^i_T converge faiblement vers une limite $A_{(T)}$. Alors on peut trouver un processus A dans $\mathbb{A}$ et une partie dénombrable Θ de $\mathbb{T}$ tels que: Θ contient l'ensemble des t.a. constants rationnels (y compris $+\infty$) et épuise les temps de saut de A, et pour tout T dans Θ $A_{(T)} = A_T$ p.s.

Démonstration

Utilisant le lemme 1 en y prenant $\Theta = \mathbb{Q}_+ \cup \{+\infty\}$ on détermine un négligeable N_1 tel que pour tout ω de $\Omega - N_1$ et pour tous $p,q \in \mathbb{Q}_+ \cup \{\infty\}$, $p \leq q$ implique $A_{(p)} \leq A_{(q)}$. Définissons alors le processus cadlag A^+ par: $A_t^+(\omega) = 0$ si $\omega \in N_1$ et $A_t^+(\omega) = \lim_{q \downarrow\downarrow t} A_{(q)}(\omega)$ sinon. Il est alors clair que A^+ appartient à $\mathbb{A}$.

Soit Φ un ensemble dénombrable de t.a. épuisant l'ensemble des temps de saut de A^+, appliquons encore le lemme 1 avec cette fois $\Theta = \Phi$. On détermine ainsi un négligeable N_2 tel que pour $\omega \notin N_2$ on a pour tous $S,T \in \Theta$, $S(\omega) \leq T(\omega)$ implique $A_{(S)}(\omega) \leq A_{(T)}(\omega)$. Notons $\tilde{\Theta}$ la réunion des graphes des t.a. dans Θ, nous pouvons alors définir le processus A par:

$$\text{si } \omega \in \Omega - N_2 \quad A_t(\omega) = A_t^+(\omega) \quad \text{si } (t,\omega) \notin \tilde{\Theta}$$

$$\text{et} \quad A_t(\omega) = A_{(T)}(\omega) \quad \text{si } (t,\omega) \in \tilde{\Theta} \ \text{ et } \ t = T(\omega)$$

$$\text{sinon} \quad A_t(\omega) = 0$$

On vérifie que A est bien défini et qu'il appartient à $\mathbb{A}$, et le Θ de l'énoncé est $\Phi \cup \mathbb{Q}_+ \cup \{\infty\}$.

LEMME 3

Supposons (A_∞^i) uniformement intégrable et soit $A \in \mathbb{A}$. Pour que $\lim_i A^i = A$ au sens de la topologie faible des processus t.i., il suffit que $\lim_i A_T^i = A_T$ $(\sigma(L^1, L^\infty))$ pour tout T élément de Θ, ensemble dénombrable de t.a. contenant $\mathbb{Q}_+ \cup \{\infty\}$ et épuisant l'ensemble des temps de saut de A.

Démonstration

Soit T un t.a. quelconque, nous allons démontrer que pour tout $B \in \mathcal{F}_\infty$ on a $\lim_i \int 1_B(A_T^i - A_T)dP = 0$. Rangeons les temps de saut de A en une suite T_n, que nous pouvons supposer à graphes disjoints, notons D l'ensemble $\{\omega : \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } T(\omega) = T_n(\omega)\}$, C le complément de D, et soit p un entier positif; on peut écrire

$$I^i = \int 1_B(A_T^i - A_T)dP = \int 1_B 1_D (A_T^i - A_T)dP + \int 1_B 1_C (A_T^i - A_T)dP$$

on en déduit la majoration suivante de I^i:

$$I^i \leq \int 1_B 1_{\{T=\infty\}}(A_T^i - A_T)dP + \int 1_B 1_{\bigcup_k \{T=T_k<\infty\}}(A_T^i - A_T)dP + \int 1_B 1_C \sum_{k=0}^{\infty} 1_{\{\frac{k}{p} \leq T < \frac{k+1}{p}\}}(A^i_{\frac{k+1}{p}} - A_T)dP$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. La première intégrale tend vers 0 par hypothèse. Pour la deuxième on a $\lim_k P[\bigcup_{j=k+1}^{\infty} \{T = T_j < \infty\}] = 0$ (les graphes sont disjoits), comme A_∞^i, et donc aussi $A_T^i - A_T$, est u.i. il est possible de choisir k assez grand pour que pour tout i

$$\left|\int 1_B 1_{\bigcup_{j\geq k+1}\{T=T_j<\infty\}}(A^i_T - A_T)dP\right| \leq \varepsilon$$

et alors, pour k fixé, on aura pour i assez "grand"

$$\left|\sum_{j=0}^{k}\int 1_B 1_{\{T=T_j\}}(A^i_{T_j} - A_{T_j})dP\right| \leq \varepsilon .$$

Pour la troisième intégrale, écrivons

$$A^i_{\frac{k+1}{p}} - A_T = A^i_{\frac{k+1}{p}} - A_{\frac{k+1}{p}} + A_{\frac{k+1}{p}} - A_T$$

Ici, pour p parcourant $\mathbb{N}^*$, les v.a.

$$\zeta_p = \sum_k 1_{C\cap\{\frac{k}{p}<T\leq\frac{k+1}{p}\}}(A_{\frac{k+1}{p}} - A_T)$$

sont u.i. et convergent p.s. vers 0 quand p tend vers l'infini; pour p assez grand on a donc $\int|\zeta_p|dP<\varepsilon$. Mais pour p fixé l'intégrale

$$\left|\int 1_B 1_C \sum_k 1_{\{\frac{k}{p}<T\leq\frac{k+1}{p}\}}(A^i_{\frac{k+1}{p}} - A_{\frac{k+1}{p}})dP\right|$$

peut être rendue inférieure à 2ε pour i assez "grand" par le procédé utilisé pour la deuxième intégrale. On a ainsi obtenu $I^i \leq 6\varepsilon$ pour i assez "grand".
Une minoration similaire de I^i montre que pour i assez "grand" $-6\varepsilon\leq I^i$, et le lemme est démontré.

Les lemmes 2 et 3 montrent que si (A^i_T) converge faiblement pour chaque T dans $\mathbb{T}$, alors (A^i) admet une limite dans $\mathbb{A}$ dès que (A^i_∞) est u.i., en particulier $\mathbb{A}$ est séquentiellement fermé pour la topologie faible des processus t.i.

Nous pouvons maintenant donner une première caractérisation des parties relativement compactes de $\mathbb{A}$:

THEOREME 1

Soit H une partie de $\mathbb{A}$, les conditions suivantes sont équivalentes:

1) H est relativement compacte;
2) pour tout T dans $\mathbb{T}$ $\{A_T: A\in H\}$ est faiblement relativement compacte dans L^1;
3) $\{A_\infty: A\in H\}$ est uniformément intégrable.

Démonstration

L'équivalence des 2) et 3) résulte du théorème de Dunford-Pettis et du fait que A est positif, croissant.

D'autre part 1) implique 2), puisque par définition, pour chaque T dans $\mathbb{T}$, l'application $A \mapsto A_T$ est continue pour les topologies considérées.
Montrons donc que 2) implique 1). Soit U un ultrafiltre sur H, par hypothèse l'ultrafiltre image U_T de U par l'application continue $A \mapsto A_T$ converge faiblement vers un élément $A_{(T)}$ de L^1; les lemmes 2 et 3 permettent alors de construire un processus dans $\mathbb{A}$, limite de U.

L'autre caractérisation des parties relativement compactes de $\mathbb{A}$ que nous avons en vue, sera un corollaire d'un théorème de Helly pour les processus croissants. Pour démontrer ce dernier nous avons besoin du

<u>LEMME 4</u>

Soit $(E_n, \mathcal{E}_n)$ une suite d'espaces topologiques, et pour chaque n soit F_n une partie séquentiellement relativement compacte de E_n. Alors le produit $\prod_n F_n$ est séquentiellement relativement compacte dans $(\prod_n E_n, \bigotimes_n \mathcal{E}_n)$.

Démonstration
On utilise l'argument classique de la suite diagonale.

<u>THEOREME 2</u> (théorème de Helly pour les processus dans $\mathbb{A}$)

Soit $\{A^n : n \in \mathbb{N}\}$ une partie relativement compacte de $\mathbb{A}$. Il existe une suite extraite (A^{n_k}) et un élément A de $\mathbb{A}$ tels que $\lim_k A^{n_k} = A$.

Démonstration
Le lemme 4 appliqué à $\{(A^n_q)_{q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}} : n \in \mathbb{N}\}$ montre qu'il existe une suite (A^{n_i}) extraite de (A^n) telle que pour tout $q \in \mathbb{Q}_+ \cup \{\infty\}$ $(A^{n_i}_q)$ converge faiblement dans L^1 vers une limite $A_{(q)}$, et le lemme 1 montre qu'il existe un négligeable N_1 tel que si $\omega \notin N_1$ alors $\forall p, q \in \mathbb{Q}_+ \cup \{\infty\}$ $p \leq q$ implique $A_{(p)} \leq A) \leq A_{(q)}(\omega)$. Définissons A^+ et Ψ à partir de $A_{(p)}$ comme dans la démonstration du lemme 2, et posons $\Theta = \Psi \cup \mathbb{Q}_+ \cup \{\infty\}$. Le lemme 4 affirme maintenant qu'il existe une soussuite $(A^{n_{i_k}})$ telle que pour tout $T \in \Theta$ $(A^{n_{i_k}}_T)$ soit faiblement convergente dans L^1. Appelons $A_{(T)}$ cette limite, le lemme 1 montre qu'il existe N_2 négligeable tel que pour $\omega \notin N_2$, $\forall S, T \in \mathbb{T}$ $A_{(S)}(\omega) \leq A_{(T)}(\omega)$ sur $\{S \leq T\}$. Nous définissons maintenant A par:

$$\begin{array}{lll} \text{si } \omega \in \Omega - N_2 & A_t(\omega) = A_t^+(\omega) & \text{si } (t,\omega) \notin \Theta \\ & \text{et } A_t(\omega) = A_{(T)}(\omega) & \text{si } (t,\omega) \in \Theta \\ \text{si } \omega \in N_2 & A_t(\omega) = 0 & \end{array}$$

Le lemme 3 permet d'achever la démonstration.

Le théorème de Helly ci-dessus dit donc que toute partie relativement compacte de $\mathbb{A}$ est séquentiellement relativement compacte. La réciproque est vraie, plus précisément:

COROLLAIRE

Soit H une partie de $\mathbb{A}$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1) H est relativement compacte;
2) H est séquentiellement relativement compacte;
3) toute partie infinie, dénombrable de H possède un point limite.

Démonstration

Nous avons vu que 1) implique 2), il est clair que 1) implique 3). Supposons que 2) est vérifié, il est facile de voir qu'alors $H_T = \{A_T : A \in H\}$ est séquentiellement faiblement relativement compacte dans L^1 pour tout T. Le théorème d'Eberlein-Smulian montre alors que H_T est faiblement relativement compacte, puis le théorème 1 que 2) implique 1). On démontre de façon similaire que 3) implique 1).

Soient E un espace topologique compact, (M,d) un espace métrique , et C l'espace des applications continues de E dans F muni de la convergence simple; dans [4] on trouve cité le théorème suivant: sous ces conditions, soit H une partie de C, alors tout point adhérent à H est adhérent à une partie dénombrable D de H (La démonstration est élémentaire: supposons g adhérente à H, posons $E_f^{n,k} = \{x=(x_1,\dots,x_n) \in E^n : d(f(x_i),g(x_i)) < 1/k \text{ pour } i=1,\dots,n\}$; la famille $\{E_f^{n,k}\}_{f\in H}$ constitue un recouvrement ouvert du compact E^n dont on peut extraire un recouvrement fini $\{E_{f_i}^{n,k}\}_{i=1,\dots,p_{n,k}}$, et il est clair que g adhère à la partie dénombrable constituée par l'ensemble des f_i de $E_{f_i}^{n,k}$ quand n et k parcourent $\mathbb{N}$).

Ci-après d désigne une distance compatible avec la topologie produit usuelle sur $\mathbb{R}^\Theta$ (Θ dénombrable):

THEOREME 3

Si H est une partie relativement compacte de $\mathbb{A}$, tout point adhérent à H est limite d'une suite dans H.

Démonstration

Soient A adhérent à H et Θ une partie dénombrable de $\mathbb{T}$ contenant $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ et épuisant les temps de saut de A. Soit B la boule unité fermée de L^∞, B est compacte pour $\sigma(L^\infty,L^1)$, et le produit $\prod_{T\in\Theta} H_T$ est de façon canonique identifiable à une partie relativement compacte de l'espace des applications continues sur $(B,\sigma(L^\infty,L^1))^\Theta$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^\Theta,d)$ muni de la convergence simple. Le théorème rappelé ci-dessus montre alors que la restriction de A à Θ est adhérente (sur Θ) à une partie dénombrable D de H. Or $\prod_{T\in\Theta}\bar{D}_T$ est métrisable puisque $\bar{D}_T$ muni de la topologie induite par $\sigma(L^1,L^\infty)$ l'est, on en déduit l'existence d'une suite convergeant vers A sur Θ. On termine en appliquant le lemme 3.

Dans la démonstration nous avons utilisé le fait que si D est une partie dénombrable u.i. de L^1, alors la topologie induite sur l'adhérence faible de D par $\sigma(L^1,L^\infty)$ est métrisable. Indiquons-en la démonstration. Posons $\tau_1=\sigma(L^1,L^\infty)$, soit G la tribu engendrée par D et $\tau_2=\sigma(L^1,L^\infty(G))$. On a $\bar{D}^{\tau_1}\subset\bar{D}^{\tau_2}$. Inversement, soient $f\in\bar{D}^{\tau_2}$ et (f_i) une suite généralisée dans D de limite f pour τ_2, alors f est G-mesurable et on a pour tout h dans L^∞

$$E[f_ih]=E[f_iE[h|G]]\longrightarrow E[fE[h|G]]=E[fh]$$

donc $f_i\longrightarrow f$ pour τ_1 et $\bar{D}^{\tau_1}=\bar{D}^{\tau_2}$. $\bar{D}$ est donc un compact faible pour $L^1(G)$ qui est, lui, séparable, et D est alors métrisable.

REMARQUE. Nous aurons besoin de l'énoncé suivant qui se démontre comme le théorème 3:

Soit H une partie relativement compacte de $\mathbb{A}\times L^1$ (muni de la topologie produit de la topologie de $\mathbb{A}$ et de $\sigma(L^1,L^\infty)$. Alors tout point adhérent à H est limite d'une suite dans H.

ETUDE DES PARTIES RELATIVEMENT COMPACTES DE $\mathbb{S}$.

Nous allons maintenant démontrer pour l'espace $\mathbb{S}$ des surmartingales fortes optionnelles sur $[0,\infty]$ muni de la topologie induite par la topologie faible des processus totalement intégrables, des résultats similaires à ceux obtenus pour $\mathbb{A}$ dans le paragraphe précédent. La démonstration du premier énoncé ci-dessous est empruntée à [1].

THEOREME 4

Soit H une partie de $\mathbb{S}$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1) H est relativement compacte;
2) Pour tout T dans $\mathbb{T}$, $\{X_T : X \in H\}$ est faiblement relativement compacte dans L^1;
3) Pour tout T, H_T est uniformément intégrable.

Démonstration

Le théorème de Dunford-Pettis affirme l'équivalence de 2) et 3).
1) implique 2), puisque pour tout T l'application $X \mapsto X_T$ est continue.
Supposons 2) vraie. Soit U un ultrafiltre sur H, notons $X_{(T)}$ la limite faible dans L^1 de l'ultrafiltre U_T, image de U par $X \mapsto X_T$. Soient S et T deux éléments de $\mathbb{T}$ vérifiant $S \leq T$ p.s., on vérifie que $X_{(S)} \geq E[X_{(T)} | \mathcal{F}_S]$ p.s. Le théorème sera donc démontré si l'on peut trouver un processus X dans $\mathbb{S}$ tel que pour tout T $X_T = X_{(T)}$; or un tel processus X existe (théorème 15 de [1]).

Le théorème de Helly des surmartingales fortes sera déduit du lemme suivant:

Soit (X^n) une suite dans $\mathbb{S}$. Nous supposons (X^n) uniformément bornée avec $X^n \geq 0$ et $X^n_\infty = 0$ p.s. pour tout n,

LEMME 5

Sous ces conditions il existe une suite (X^{n_k}) extraite de (X^n) et un processus X de $\mathbb{S}$ tels que $\lim_k X^{n_k} = X$.

Démonstration

Soit K une borne de (X^n). Chaque X^n étant de classe (D), il existe A^n dans $\mathbb{A}$ tel que pour tout T $X^n_T = E[A^n_\infty - A^n_T | \mathcal{F}_T]$. L'ensemble des A^n_∞ est alors u.i., en effet, de $0 \leq X^n_t \leq K$ p.s. pour tout t on déduit (Garcia) $\|A^n_\infty\|_{L^2} \leq 2K$ (voir [2]). Le théorème 2 montre maintenant qu'il existe une suite (A^{n_k}) extraite de (A^n) et un processus A tels que pour tout T $A_T^{n_k}$ converge faiblement vers A_T. L'espérance conditionnelle étant (fortement, donc faiblement) continue sur L^1, on en déduit en particulier que pour tout T $E[A_\infty^{n_k}|\mathcal{F}_T]$ converge faiblement vers $E[A_\infty|\mathcal{F}_T]$. Ainsi on voit que, puisque $X_T = E[A_\infty - A_T|\mathcal{F}_T]$, on a au sens de la topologie dont on a muni $\mathcal{S}$, $\lim_k X^{n_k} = X$.

<u>THEOREME 5</u> (théorème de Helly pour les surmartingales fortes)
Toute partie relativement compacte de $\mathcal{S}$ est séquentiellement relativement compacte.

Démonstration
Soit donc (X^n) une suite relativement compacte de $\mathcal{S}$, nous allons montrer que l'on peut en extraire une soussuite convergente (X^{n_k}). Quitte à considérer $X_t^n - M_t^n$ (M_t^n étant la version cadlag de la martingale $E[X_\infty^n|\mathcal{F}_t]$) et à passer par une deuxième extraction de soussuite pour s'assurer de la convergence à l'infini (ce qui est possible, (X_∞^n) etant u.i.), on peut supposer X^n positif avec $X_\infty^n = 0$ p.s. Sous ces conditions le lemme 5 montre que pour chaque $m \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\{X^n \wedge m : n \in \mathbb{N}\}$ est séquentiellement compact, et à son tour le lemme 4 affirme qu'il existe une suite (X^{n_k}) extraite de (X^n) et une suite (Y^m) dans $\mathcal{S}$ telles que pour tout m $\lim_k X^{n_k} \wedge m = Y^m$.
Il est facile de voir que la suite (Y^m) est croissante. Nous allons montrer que le processus limite $Y = \lim\uparrow Y^m$ est dans $\mathcal{S}$ et que $\lim_k X^{n_k} = Y$ au sens de la topologie sur $\mathcal{S}$.
Soient $B \in \mathcal{F}_\infty$ et $T \in \mathbb{T}$ quelconques, on a

$$\int 1_B(X_T^{n_k} - Y_T)dP = \int 1_B(X_T^{n_k} - X_T^{n_k}\wedge m)dP + \int 1_B(X_T^{n_k}\wedge m - Y_T^m)dP + \int 1_B(Y_T^m - Y_T)dP$$

$\{X_T^{n_k}\wedge m : k, m \in \mathbb{N}\}$ est u.i. puisque $\{X_T^n\}$ l'est par hypothèse, (Y_T^m) est donc aussi u.i., ainsi Y_T est limite forte dans L^1 de (Y_T^m).
Il est donc possible de rendre le premier et le dernier terme du deuxième membre de l'égalité ci-dessus arbitrairement petits (et cela uniformément en k) en choisissant m assez grand. Puis, pour m fixé, on rend le deuxième terme arbitrairement petit en prenant k grand. On en déduit que Y est totalement intégrable et limite au sens de la topologie faible des processus totalement intégrables de (X^{n_k}). Enfin Y est dans $\mathcal{S}$ puisque l'on a pour tous $S, T \in \mathbb{T}$ avec $S \leq T$ $Y_S = \lim Y_S^m \geq \lim E[Y_T^m|\mathcal{F}_S] = E[Y_T|\mathcal{F}_S]$ (lim. faibles dans L^1).

COROLLAIRE

Soit H une partie de $\mathfrak{S}$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1) H est relativement compacte;
2) H est séquentiellement relativement compacte;
3) toute partie infinie, dénombrable de H possède un point limite.

Démonstration

La démonstration est exactement la même que celle du corollaire du th. 2.

Soit $X \in \mathfrak{S}$; si X est de la classe (D), il existe $A^X \in \mathbb{A}$ prévisible nul en zéro unique tel que pour tout T $E[X_T - X_\infty | \mathcal{F}_T] = E[A_\infty - A_T | \mathcal{F}_T]$ p.s. Pour démontrer notre dernier énoncé, le théorème 6, nous nous servons du théorème 3, ce qui nous oblige à travailler avec une partie H de $\mathfrak{S}$ telle que sur l'adhérence de H l'application $X \mapsto A^X$ soit continue. Le lemme 6 ci-dessous, que nous avons adapté d'un théorème du chapitre VII de [2], montre qu'il suffit pour cela de prendre H uniformement de la classe (D) (i.e. tel que $\{X_T : X \in H, T \in \mathbb{T}\}$ est u.i.).

LEMME 6

Soit H une partie de $\mathfrak{S}$. Si H est uniformément de la classe (D), alors l'application $X \mapsto A^X$ est continue sur l'adhérence de H.

Démonstration

Si H est uniformément de la classe (D), il est facile de voir qu'il en est de même de l'adhérence de H. Il suffit donc de démontrer que si H est uniformement de la classe (D) l'application $X \mapsto A^X$ est continue sur H. En fait il suffit de vérifier que l'application $X \mapsto A^X_\infty$ de $\mathfrak{S}$ dans L^1 est continue pour la topologie considérée sur $\mathfrak{S}$ et pour $\sigma(L^1, L^\infty)$, puisque $A^X_T = E[A^X_\infty | \mathcal{F}_T] - E[X_T - X_\infty | \mathcal{F}_T]$ et l'espérance conditionnelle est faiblement continue. Cette dernière propriété montre d'ailleure que nous pouvons supposer X_∞ p.s. nulle. Nous pouvons enfin supposer tous les X continus en $+\infty$ (remplacer d'abord l'axe des temps $[0,\infty]$ par $[0,1]$ à l'aide de $f(x)=x/1+x$, puis prolonger en une nouvelle surmartingale Y sur $[0,\infty]$ en posant $Y_t = Y_1$ $(=X_\infty)$ pour $t \in [1,\infty]$).

Soient (X^i) une suite généralisée dans H admettant X dans H pour limite. Posons $A = A^X$ et $A^i = A^{X^i}$.

Pour vérifier, sous ces hypothèses, que pour tout v.a. bornée M $E[MA_\infty] = \lim_i E[MA^i_\infty]$, nous allons suivre pas à pas la démonstration du théorème cité dans [2].

Nous savons que A et A^i sont prévisibles, introduisant la martingale cadlag $M_t = E[M|\mathcal{F}_t]$, nous sommes ramenés à vérifier que

$$E[\int_0^\infty M_{s-}dA_s] = \lim_i E[\int_0^\infty M_{s-}dA^i_s]$$

Notons respectivement J et J_i ces intégrales. Soit $\varepsilon>0$ donné, définissons la suite de t.a. (T_k) par $T_0 = 0$, $T_{k+1} = \inf\{t>T_k : |M_t - M_{T_k}|>\varepsilon\}$. Sur $]\!]T_k, T_{k+1}]\!]$ on a $|M_{t-} - M_{T_k}| \leq \varepsilon$. Posons pour $p \leq +\infty$

$$S^p = E[\sum_{k=1}^{p} M_{T_k}(A_{T_k} - A_{T_{k-1}})]$$

et S^p_i la somme analogue relative à A^i. Posons $\|M\|_{L^\infty} = m$, nous avons

$$|J - S^\infty| \leq \varepsilon E[A_\infty]$$

et de même pour $|J_i - J_i^\infty|$, puis

$$|S^\infty - S^p| \leq mE[A_\infty - A_{T_p}] = E[X_{T_p}]$$

et de même pour $|S^\infty_i - S^p_i|$. Nous obtenons alors la majoration

$$|J - J_i| \leq |S^p - S^p_i| + \varepsilon E[A_\infty + A^i_\infty] + E[X_{T_p} + X^i_{T_p}]$$

Or $E[A^i_\infty] = E[X^i_0]$ reste bornée, on peut donc choisir ε de façon que le second terme soit arbitrairement petit. Ensuite, comme les X^i sont uniformément de la classe (D), et continus en $+\infty$, choisissant p assez grand le troisième terme peut être rendu arbitrairement petit uniformément en i. Alors, pour p fini fixé, nous avons $\lim_i S^p_i = S^p$ puisque l'on peut écrire

$$S^p_i = E[\sum_{k=1}^{p} M_{T_k}(X^i_{T_{k-1}} - X^i_{T_k})]$$

ce qui achève la démonstration.

THEOREME 6

Soit H une partie de $\mathfrak{S}$. Si H est uniformément de la classe (D), alors tout point adhérent à H est limite d'une suite dans H.

Démonstration

Utilisons l'énoncé de la remarque suivant le théorème 3. Considérons $f: \mathfrak{S} \to \mathbb{A}\times L^1$, $f(X)=(A^X, X_\infty)$. f est continue sur l'adhérence de H (lemme 6) donc 1) f(H) est relativement compacte dans $\mathbb{A}\times L^1$, et 2) si X est adhérent à H alors f(X) est adhérent à f(H). L'énoncé cité affirme alors qu'il existe une suite X^n dans H telle que f(X) soit limite de $f(X^n)$. Mais cela implique que pour tout $T\in\mathbb{T}$

$$X_T = E[X_\infty|\mathcal{F}_T] + E[A^X_\infty - A^X_T|\mathcal{F}_T] = \lim_n E[X^n_\infty|\mathcal{F}_T] + \lim_n E[A^{X^n}_\infty - A^{X^n}_T|\mathcal{F}_T]$$

et par conséquent $X_T = \lim_n X^n_T$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. DELLACHERIE et E. LENGLART: Sur des problèmes de régularisation, de recollement et d'interpolation en théorie des martingales. Sém. de Proba. 15, Lecture Notes in Mathématics, Springer.

[2] C. DELLACHERIE et P.A. MEYER: Probabilites et Potentiel, tôme 2. Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann .

[3] G. MOKOBODZKI: Ensembles compacts de fonctions fortement sur-médianes. Sém. de théorie du potentiel n° 4, Lect. Notes in Math. n° 713. Springer.

[4] J.P. TROALLIC: Thèse doctorat d'état, Rouen janvier 1980.

Are Uppman
Université de Rouen
Laboratoire de Mathématiques
B.P. n° 67
76130 Mont-Saint-Aignan