SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JIAN-AN YAN

À propos de l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 338-347
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__338_0>

A PROPOS DE L'INTEGRABILITE UNIFORME DES MARTINGALES EXPONENTIELLES*

J.-A. YAN

1. INTRODUCTION

Soit $(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_t))$ un espace satisfaisant aux conditions habituelles. Si M est une martingale locale nulle en 0 à sauts $\Delta M \geq -1$, la martingale (locale) exponentielle $\mathcal{E}(M)$ est définie par

$$\mathcal{E}(M)_t = \exp\{M_t - \frac{1}{2}\langle M^c,M^c\rangle_t\} \prod_{s\leq t} (1+\Delta M_s)e^{-\Delta M_s} .$$

La recherche de conditions suffisantes pour l'intégrabilité uniforme de la martingale locale positive $\mathcal{E}(M)$ a donné lieu à de nombreux travaux. Dans le cas où M est continue et uniformément intégrable, Novikov [1] et Kazamaki [3] ont obtenu successivement les deux conditions suivantes

(1) $\quad E[\exp \frac{1}{2}\langle M,M\rangle_\infty] < \infty$,

(2) $\quad E[\exp \frac{1}{2} M_\infty] < \infty$.

Lépingle et Mémin ont étendu dans [4] et [5] ces résultats au cas général. Si M est une martingale locale nulle en 0 à sauts $\Delta M \geq -1$, si $T = \inf\{t>0: \Delta M_t = -1\}$, si μ désigne la mesure aléatoire à valeurs entières associée à ses sauts et si ν désigne la projection prévisible duale de μ, les conditions obtenues par Lépingle et Mémin étaient les suivantes

(3) $\quad E\left[\exp\{\frac{1}{2}\langle M^c,M^c\rangle_\infty + (\log(1+x) - \frac{x}{1+x})\cdot\mu_\infty\}\right] < \infty \quad , T=\infty$,

(4) $\quad E\left[\exp\{\frac{1}{2}\langle M^c,M^c\rangle_T + ((1+x)\log(1+x) - x)\cdot\nu_{T-}\}\right] < \infty$,

(5) $\quad E\left[\exp\{\frac{1}{2}M_\infty + (\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2(1+x)})\, I_{\{x<o\}}\cdot\mu_\infty\}\right] < \infty \quad , T=\infty$,

(6) $\quad E\left[\exp\{\frac{1}{2}M_T + \frac{1}{2}((1+x)\log(1+x) - x)\cdot\nu_{T-}\}\right] < \infty$,

(7) $\quad E\left[\exp \frac{1}{1+\delta} M_\infty\right] < \infty , \quad \Delta M \geq -1+\delta , \quad 0<\delta\leq 1$,

où dans les conditions (5), (6) et (7), M est supposée uniformément intégrable jusqu'à l'instant T. En nous inspirant de [5] nous avons

* Ce travail a bénéficié du soutien de la A. von Humboldt-Stiftung.

dans [7] affaibli les conditions (3) et (7) en donnant les deux conditions suivantes:

(8) $\underset{a\uparrow\uparrow 1}{\underline{\lim}} \left(E[\exp\{\frac{a}{2} \langle M^c,M^c\rangle_\infty + (\log(1+x) - \frac{x}{1+x}) \cdot \mu_\infty\}]\right)^{1-a} = 1, \quad T = \infty$

(9) $\underset{a\uparrow\uparrow 1}{\underline{\lim}} \left(E \exp \frac{a}{1+\delta} M_\infty\right)^{1-a} = 1, \Delta M \geq -1+\delta, \quad 0 < \delta \leq 1, \quad M$ est u.i. .

Cette note a pour but d'affaiblir également les conditions (4) et (5) (mais non (6)). En outre, nous donnons un nouveau critère d'intégrabilité uniforme (Théorème 2) et des compléments sur notre article [7].

2. UN LEMME FONDAMENTAL

Notre travail va reposer sur le seul lemme suivant. Ce lemme, dont le principe était la clef de l'obtention des conditions (8) et (9) dans [7], trouve son idée d'origine dans [5] et [6]. Mais nous ne l'avons jamais ainsi formulé.

LEMME. Soit M une martingale locale nulle en 0 à sauts $\Delta M \geq -1$. Soient, pour tout $0 < a < 1$, $Z^{(a)}$ un processus positif càdlàg adapté de classe (D) tel que $\lim\limits_{t\to\infty} Z_t^{(a)} = Z_\infty^{(a)}$ existe et $L^{(a)}$ une martingale locale positive avec $L_0^{(a)} = 1$. Soit f une application de $]0,1[$ dans $]0,1[$ telle que $\lim\limits_{a\uparrow\uparrow 1} \frac{1-f(a)}{1-a} = \beta$ existe et que $0 < \beta < \infty$. Si on a , pour tout $t \in R_+$ et tout $0 < a < 1$,

(10) $L_t^{(a)} \leq \mathcal{E}(M)_t^{f(a)} \, Z_t^{(a)\; 1-f(a)}$

et si $\underset{a\uparrow\uparrow 1}{\underline{\lim}} \left(E[Z_\infty^{(a)}]\right)^{1-a} = 1$, alors $\mathcal{E}(M)$ est une martingale uniformément intégrable.

DEMONSTRATION. $\mathcal{E}(M)$ étant une surmartingale positive, $\mathcal{E}(M)$ est donc dans L^1 . Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des temps d'arrêt bornés. Si $C \in \mathcal{F}$ et $S \in \mathcal{T}$, on a , d'après l'inégalité de Hölder,

$$E[I_C L_S^{(a)}] \leq \left(E[\mathcal{E}(M)_S]\right)^{f(a)} \left(E[I_C Z_S^{(a)}]\right)^{1-f(a)} \leq \left(E[I_C Z_S^{(a)}]\right)^{1-f(a)} ,$$

d'où l'intégrabilité uniforme de la martingale $L^{(a)}$. D'après (10) on a

$$1 = E[L_\infty^{(a)}] \leq \left(E[\mathcal{E}(M)_\infty]\right)^{f(a)} \left(E[Z_\infty^{(a)}]\right)^{1-f(a)} .$$

De cette inégalité, en faisant a tendre vers 1, on déduit $E[\mathcal{E}(M)_\infty] \geq 1$, puisque

$$\lim_{a\uparrow\uparrow 1} \left(E[Z_\infty^{(a)}]\right)^{1-f(a)} = \lim_{a\uparrow\uparrow 1} \left(E[Z_\infty^{(a)}]\right)^{1-a} = 1 .$$

$\mathcal{E}(M)$ étant une surmartingale positive avec $\mathcal{E}(M)_0 = 1$, on a donc $E[\mathcal{E}(M)_\infty] = 1$. Ce qui équivaut à dire que $\mathcal{E}(M)$ est une martingale uniformément intégrable. CQFD.

REMARQUE. Pour nous la recherche de conditions suffisantes de l'intégrabilité uniforme de la martingale (locale) exponentielle $\mathcal{E}(M)$ s'est ramenée tout simplement à la recherche d'inégalités du type (10) (voir [7]). A titre d'information, nous indiquons les deux inégalités du type (10) que nous avons établies dans [7]:

(11) $$\mathcal{E}(aM)_t \leq \mathcal{E}(M)_t^a \left(\exp \frac{a}{2} \langle M^c, M^c\rangle_t + (\log(1+x) - \frac{x}{1+x}) \cdot \mu_t\right)^{1-a}$$

(12) $$\mathcal{E}(aM)_t \leq \mathcal{E}(M)_t^\beta \left(\exp \frac{a-\beta}{1-\beta} M_t\right)^{1-\beta} , \quad \Delta M \geq -1+\delta,\ 0 < \delta \leq 1, \beta = \frac{a^2\delta}{1-a+a\delta} .$$

3. CRITERES D'INTEGRABILITE UNIFORME

Dans toute la suite, M est une martingale locale nulle en 0 à sauts $\Delta M \geq -1$ et $T = \inf\{t > 0 : \Delta M_t = -1\}$, μ désigne la mesure aléatoire associée à ses sauts et ν désigne la projection prévisible duale de μ.

THEOREME 1. Si M est quasi-continue à gauche. Si

$$E[\exp\{\frac{a}{2} \langle M^c, M^c\rangle_T + \left((1+x)\log(1+x) - x\right) \cdot \nu_T\}] < \infty , \quad 0 < a < 1 ,$$

et si

(13) $$\lim_{a\uparrow\uparrow 1} \left(E[\exp\{\frac{a}{2} \langle M^c, M^c\rangle_T + \left((1+x)\log(1+x) - x\right) \cdot \nu_T\}]\right)^{1-a} = 1 ,$$

$\mathcal{E}(M)$ est une martingale u.i. .

DEMONSTRATION. On peut supposer que $M = M^T$, puisqu'on a $\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(M)^T$.
Comme on a, pour $0 < a < 1$, $0 \leq 1+ax-(1+x)^a \leq (1-a)[(1+x)\log(1+x)-x]$,
et $E[((1+x)\log(1+x)-x) \cdot \nu_\infty] < \infty$, on peut définir les processus suivants

$$W_t^{(a)} = ((1+x)^a - 1 - ax) \cdot \mu_t \,, \quad V_t^{(a)} = ((1+x)^a - 1 - ax) \cdot \nu_t \,,$$

$$N_t^{(a)} = aM_t + W_t^{(a)} - V_t^{(a)} \,, \qquad A_t^{(a)} = \frac{a(a-1)}{2} <M^c,M^c>_t + V_t^{(a)} \,,$$

M étant supposée quasi-continue à gauche, $V_t^{(a)}$ est continu.
Par conséquent, on a

$$\mathcal{E}(M)_t^a = \mathcal{E}(N^{(a)} + A^{(a)})_t = \mathcal{E}(\dot{N}^{(a)})_t \exp A_t^{(a)} \,, \tag{14}$$

où $\dot{N}^{(a)}$ est une martingale locale nulle en 0 à sauts $\Delta N^{(a)} \geq -1$ et on a $T = \inf\{t > 0: \Delta N_t^{(a)} = -1\}$. Compte tenu de l'inégalité
$0 \leq 1+ax - (1+x)^a \leq (1-a)[(1+x)\log(1+x) - x]$, on déduit de (14) l'inégalité du type (10) suivante

$$\mathcal{E}(\dot{N}^{(a)})_t \leq \mathcal{E}(M)_t^a(\exp\{\tfrac{a}{2} <M^c,M^c>_t + ((1+x)\log(1+x) - x) \cdot \nu_t\})^{1-a} \tag{15}$$

d'où la conclusion du théorème en appliquant le lemme fondamental. CQFD.

REMARQUE. La condition (13) est moins restrictive que la condition (4).
Le théorème suivant n'est pas comparable avec la condition (6).

THEOREME 2. Si M est quasi-continue à gauche et uniformément intégrable jusqu'à l'instant T. Si

$$E[\exp \tfrac{a}{2}\{M_T + x\log(1+x) \cdot \nu_T\}] < \infty \,, \quad 0 < a < 1 \,,$$

et si

$$\lim_{a \uparrow\uparrow 1} (E[\exp \tfrac{a}{2}\{M_T + x\log(1+x) \cdot \nu_T\}])^{1-a} = 1 \,, \tag{16}$$

alors $\mathcal{E}(M)$ est u.i. .

DEMONSTRATION. Si $0 < a < 1$ et $x > -1$, posons

$$f(x) = 1 + ax - (1+x)^a - a(1-a)\, x \log(1+x) \; .$$

On a $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, et

$$f''(x) = \frac{-a(1-a)\,[-(1+x)^a+2+x]}{(1+x)^2} < 0 \; ,$$

d'ou $f'(x) \geq 0$ pour $0 \geq x > -1$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x \geq 0$, donc on a $f(x) \leq 0$ pour $x > -1$. D'autre part, on a toujours

$$(17) \qquad \mathcal{E}(M)^a_t = \mathcal{E}(M)^{a^2}_t \exp\{a(1-a)M_t - \frac{a(1-a)}{2} <M^c,M^c>_t + (a-a^2)(\log(1+x) - x) \cdot \mu_t\} \; ,$$

d'où, en remarquant que $\log(1+x) - x \leq 0$,

$$(18) \qquad \mathcal{E}(M)^a_t \leq \mathcal{E}(M)^{a^2}_t \exp\{a(1-a)M_t - \frac{a(1-a)}{2} <M^c,M^c>_t\} \; .$$

En appliquant l'inégalité $1+ax-(1+x)^a \leq a(1-a)\, x \log(1+x)$ et d'après (14) et (18), on a alors

$$\mathcal{E}(N^{(a)})_t \leq \mathcal{E}(M)^{a^2}_t \left(\exp \frac{a}{1+a} \{M_t + x\log(1+x) \cdot \nu_t\}\right)^{1-a^2} \; .$$

Soit $Z^{(a)}_t = \exp \frac{a}{1+a} \{M_t + x\log(1+x) \cdot \nu_t\}$. On peut supposer que M est arrêté à l'instant T . Il est évident que $Z^{(a)}$ est une sousmartingale positive uniformément intégrable (d'après l'inégalité de Jensen). Comme la condition $\lim\limits_{a\uparrow\uparrow 1} (E[Z^{(a)}_\infty])^{1-a} = 1$ est équivalente à (16), on conclut le théorème en appliquant le lemme. CQFD.

THEOREME 3. Soit M une martingale u.i. à sauts $\Delta M > -1$. Si pour tout $0 < a < 1$

$$E[\exp a\{\tfrac{1}{2} M_\infty + \left(\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2(1+x)}\right) I_{\{x<o\}} \cdot \mu_\infty\}] < \infty \; ,$$

et si

$$(19) \qquad \lim_{a\uparrow\uparrow 1} \left(E[\exp a\{\tfrac{1}{2}M_\infty + \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2(1+x)}) I_{\{x<o\}} \cdot \mu_\infty\}]\right)^{1-a} = 1 \; ,$$

alors $\mathcal{E}(M)$ est une martingale u.i. .

DEMONSTRATION. Si $0 < a < 1$, posons

$$f(x) = \log(1+ax) - a^2\log(1+x) - a(1-a)x ,$$

$$g(x) = 2a(1-a)[\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2(1+x)}] ,$$

on a $f(0) = g(0) = 0$, et

$$f'(x) = \frac{a^2(a-1)x^2}{(1+x)(1+ax)} \leq 0 , \quad x > -1 ,$$

$$f'(x) - g'(x) = \frac{a(1-a)^2x^2}{(1+ax)(1+x)^2} \geq 0 , \quad x > -1 ,$$

d'où les deux inégalités ci-dessous:

$$\log(1+ax) - a^2\log(1+x) - a(1-a)x \leq 0 , \quad x \geq 0 , \tag{20}$$

$$0 \leq \log(1+ax)-a^2\log(1+x)-a(1-a)x \leq 2a(1-a)[\log(1+x)-x + \frac{x^2}{2(1+x)}] , \quad -1 < x \leq 0 . \tag{21}$$

Soit maintenant $0 < a < 1$. On a

$$\mathcal{E}(aM)_t = \exp\{aM_t - \frac{a^2}{2} <M^c,M^c>_t + (\log(1+ax) - ax) \cdot \mu_t\}$$

$$= \mathcal{E}(M)_t^{a^2} \exp\{a(1-a)M_t + (\log(1+ax)-a^2\log(1+x)-a(1-a)x) \cdot \mu_t\} ,$$

d'où, d'après (20) et (21), l'inégalité du type (10) suivante

$$\mathcal{E}(aM)_t \leq \mathcal{E}(M)_t^{a^2} \exp a(1-a)\{M_t + 2\left(\log(1+x)-x + \frac{x^2}{2(1+x)}\right) I_{\{x<o\}} \cdot \mu_t\} \tag{22}$$

$$= \mathcal{E}(M)_t^{a^2} \left(\exp \frac{2a}{1+a} \{\frac{1}{2}M_t + \left(\log(1+x)-x + \frac{x^2}{2(1+x)}\right) I_{\{x<o\}} \cdot \mu_t\}\right)^{1-a^2} .$$

En remarquant que la condition

$$\lim_{a \uparrow\uparrow 1} \left(E[\exp \frac{2a}{1+a} \{\frac{1}{2}M_\infty + \left(\log(1+x)-x + \frac{x^2}{2(1+x)}\right) I_{\{x<o\}} \cdot \mu_\infty\}]\right)^{1-a} = 1$$

est équivalente à la condition (19), on conclut le théorème toujours en appliquant le lemme. CQFD.

REMARQUE. La condition (19) est moins restrictive que celle (5), puisqu'on a l'inégalité $e^{ax} \leq 1 + e^{x}$ pour $0 \leq a \leq 1$.

Dans la suite nous donnons deux compléments sur notre précédent article [7].

THEOREME 4. Soit M une martingale u.i.à sauts $\Delta M \geq -1+\delta$ avec $\delta > 0$. S'il existe un α: $0 \leq \alpha \leq 1$ tel que

$$(23) \quad \lim_{a \uparrow\uparrow 1} \left(E\left[\exp \frac{a}{2}\left\{\alpha M_\infty + (1-\alpha)\langle M^c, M^c\rangle_\infty + \frac{2-\alpha}{(1+\delta)\delta}[M^d, M^d]_\infty\right\}\right]\right)^{1-a} = 1 ,$$

alors $\mathcal{E}(M)$ est u.i. .

DEMONSTRATION. Si $0 < a < 1$ et $0 < \lambda \leq a$, on a

$$\begin{aligned}(24) \quad \mathcal{E}(aM)_t &= \exp\left\{aM_t - \frac{a^2}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t + \left(\log(1+ax) - ax\right)\cdot\mu_t\right\} \\ &= \mathcal{E}(M)_t^\lambda \exp\left\{(a-\lambda)M_t + \frac{\lambda - a^2}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\right. \\ &\qquad \left. + \left(\log(1+ax) - a\log(1+x) + (a-\lambda)\left(\log(1+x) - x\right)\right)\cdot\mu_t\right\} \\ &\leq \mathcal{E}(M)_t^\lambda \left(\exp\left\{\frac{a-\lambda}{1-\lambda} M_t + \frac{\lambda - a^2}{2(1-\lambda)}\langle M^c, M^c\rangle_t\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \frac{1}{1-\lambda}\left(\log(1+ax) - a\log(1+x)\right)\cdot\mu_t\right\}\right)^{1-\lambda} \\ &\leq \mathcal{E}(M)_t \left(\exp\left\{\frac{a-\lambda}{1-\lambda}M_t + \frac{\lambda - a^2}{2(1-\lambda)}\langle M^c, M^c\rangle_t\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. \frac{a(1-a)}{1-\lambda}\,\frac{1}{(1+\delta)\delta}\,[M^d, M^d]_t\right\}\right)^{1-\lambda} ,\end{aligned}$$

ici dans la dernière étape on a utilisé l'inégalité suivante (voir [7, Lemme 2.3])

$$(25) \quad \log(1+ax) - a\log(1+x) \leq \frac{a(1-a)x^2}{(1+\delta)\delta} , \quad x \geq -1+\delta , \ 0 < a < 1 .$$

Maintenant si l'on pose

$$\lambda = \lambda(a) = \beta a + (1-\beta)a^2 , \quad \beta = \frac{2-2\alpha}{2-\alpha} , \quad g(a) = \frac{(2-\beta)a}{1+(1-\beta)a} ,$$

on a

$$\frac{a-\lambda}{1-\lambda} = \frac{(1-\beta)a}{1+(1-\beta)a} = \frac{1-\beta}{2-\beta}\, g(a) = \frac{\alpha}{2}\, g(a) \ ,$$

$$\frac{\lambda-a^2}{2(1-\lambda)} = \frac{\beta a}{2(1+(1-\beta)a)} = \frac{\beta}{2(2-\beta)}\, g(a) = \frac{1-\alpha}{2}\, g(a) \ ,$$

$$\frac{a(1-a)}{1-\lambda} = \frac{a}{1+(1-\beta)a} = \frac{1}{2-\beta}\, g(a) = \frac{2-\alpha}{2}\, g(a) \ .$$

D'après (24) on a l'inégalité du type (10) suivante:

$$(26) \quad \mathcal{E}(aM)_t \le \mathcal{E}(M)_t^{\lambda(a)} \Big(\exp \frac{g(a)}{2}\{\alpha M_t + (1-\alpha)\langle M^c,M^c\rangle_t + \frac{2-\alpha}{(1+\delta)\delta}[M^d,M^d]_t\}\Big)^{1-\lambda(a)} \ .$$

Comme on vérifie facilement le fait que l'on a $g(a)\uparrow\uparrow 1$ si $a\uparrow\uparrow 1$ et que $\lim\limits_{a\uparrow\uparrow 1} \frac{1-\lambda(a)}{1-g(a)} = \frac{2\alpha}{(2-\alpha)^2} < \infty$, on conclut alors le théorème en appliquant le lemme fondammental. CQFD.

REMARQUES. 1) Le théorème pour le cas $\alpha = 0$ est exactement un résultat établi dans [7] (voir [7, Théorème 3.2]).

2) Le théorème pour le cas $\alpha = 1$ donne aussi une condition pratique.

3) A partir de l'inégalité (26) on peut déduire comme dans [7], une condition de L^r-intégrabilité des martingales exponentielles.

THEOREME 5. Soit M une martingale u.i. à sauts $\Delta M > -1$. S'il existe un α: $0 \le \alpha \le 1$ et un $\lambda > 1$ tels que

$$\underline{\lim}_{a\uparrow\uparrow 1} \Big(E[\exp \frac{a}{2}\{\alpha M_\infty + (1-\alpha)\langle M^c,M^c\rangle_\infty + \lambda(1-\frac{\alpha}{2})\big(\log(1+x) - \frac{x}{1+x}\big)\cdot\mu_\infty\}]\Big)^{1-a} = 1 \ ,$$

alors $\mathcal{E}(M)$ est u.i. .

DEMONSTRATION. La démonstration est effectivement identique à la précédente. Le seul changement à faire est d'utiliser l'inégalité

$$\log(1+ax) - a\log(1+x) \le (1-a)[\log(1+x) - \frac{x}{1+x}] \ , \quad x > -1, \ 0 < a < 1 \ ,$$

au lieu d'utiliser l'inégalité (25).

En terminant cette note, il est bon de signaler que le théorème 1 implique aussi une amélioration d'un résultat dû à Novikov [2] (voir aussi [4, IV.6]) concernant une autre martingale exponentielle.

Soit $(E,\mathcal{E})$ un espace de Lusin. Notons

$$(27) \qquad \alpha(N,z,\mu)_t = \exp\{N_t - \frac{1}{2}\langle N,N\rangle_t + I_{\{|z|>1\}}z \cdot \mu_t + I_{\{|z|\leq 1\}}z*(\mu-\nu)_t - (e^z-1-z)I_{\{|z|\leq 1\}} \cdot \nu_t\} ,$$

où N est une martingale locale continue nulle en 0 , μ est une mesure aléatoire (i.e. un noyau positif de $(\Omega,\mathcal{F})$ dans $(R_+\times E, \mathcal{B}(R_+)\times\mathcal{E}))$ quasi-continue à gauche et admettant une projection previsible duale ν , z est une fonction $\mathcal{P}\times\mathcal{E}$ -mesurable à valeurs réelles telle que tous les intégrations figurant dans (27) aient un sens.

THEOREME 6. Si, avec les notations ci-dessus, on a, pour tout $t \in R_+$, $I_{\{z<-1\}}z \cdot \mu_t < \infty$ p.s., et si

$$(28) \qquad \lim_{a\uparrow\uparrow 1} \left(E[\exp\{\frac{a}{2}\langle N,N\rangle_\infty + (ze^z - e^z + 1) \cdot \nu_\infty\}]\right)^{1-a} = 1 ,$$

alors $\alpha(N,z,\mu)$ est une martingale uniformément intégrable.

La démonstration de ce théorème est la même que celle de [4, IV.6], à laquelle nous renvoyons les lecteurs. (noter tout de même que l'on a $\alpha(N,z,\mu) = \mathcal{E}(N+(e^z-1)*(\mu-\nu))$ et la condition (13) est vérifiée avec $M = N + (e^z-1)*(\mu-\nu)$ et $x = e^z - 1$.)

REMERCIEMENT. Je tiens à remercier l'Institut de Mathématiques appliqués à Heidelberg pour son hospitalité. Je remercie tout particuliérement le Professeur Dr. H. Rost d'avoir rendu possible mon séjour à Heidelberg.

REFERENCE

[1] Novikov, A.A.: On an identity for stochastic integrals. Theor. Probability Appl. 17, 717-720 (1972).

[2] Novikov, A.A.: On discontinuous martingales. Theor. Probability Appl. 20, 11-26 (1975).

[3] Kazamaki, N.: On a problem of Girsanov. Tohoku Math. Journal, 29, 4, 597-600 (1977).

[4] Lépingle, D., Mémin, J.: Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles. Z.W. 42, 175-203 (1978).

[5] Lépingle, D., Mémin, J.: Intégrabilité uniforme et dans L^r des martingales exponentielles. Sém. Prob. de Rennes (1978).

[6] Yan, J.-A.: Critères d'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles. Acta Math. Sinica 23, 2, 311-318 (1980).

[7] Yan, J.-A.: Intégrabilité uniforme et dans L^r des martingales exponentielles. Annal. Math. Sinica (1981).

Yan Jia-an

Institute of Applied Mathematics

Academia Sinica

Beijing, China

Institut für Angewandte Mathematik

Universität Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 294

6900 Heidelberg

Federal Republic of Germany