

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RAJAE ABOULAICH

## **Intégrales stochastiques généralisées**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 16 (1982), p. 380-383

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1982\\_\\_16\\_\\_380\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__380_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INTEGRALES STOCHASTIQUES GENERALISEES

par ABOULAICH Rajae

L'objet de cette note est de démontrer le lemme fondamental permettant de construire les intégrales stochastiques généralisées sans utiliser la récurrence transfinie [1]. Nous profitons aussi de cette occasion pour répondre à une question d'Emery concernant ces intégrales. Nous remercions vivement Monsieur C. Stricker pour son aide et son accueil à Strasbourg.

Un ensemble aléatoire  $J$  est appelé un intervalle optionnel (resp. prévisible) s'il est optionnel (resp. prévisible) et si toutes ses coupes  $J(\omega)$  sont des intervalles (certaines coupes pouvant être fermées d'autres ouvertes, etc ...).

LEMME. Soit  $\mathcal{J}$  une classe d'intervalles optionnels (resp. prévisibles) ayant les propriétés suivantes :

- a)  $\mathcal{J}$  est héréditaire : chaque intervalle optionnel (prévisible) contenu dans un élément de  $\mathcal{J}$  appartient aussi à  $\mathcal{J}$  ;
- b)  $\mathcal{J}$  est stable par réunion disjointe : si  $J_1$  et  $J_2$  appartiennent à  $\mathcal{J}$ , si leur intersection est vide et si leur réunion est un intervalle, alors leur réunion appartient aussi à  $\mathcal{J}$  ;
- c)  $\mathcal{J}$  est stable par limite croissante : si  $(J_n)$  est une suite croissante d'éléments de  $\mathcal{J}$ , sa limite appartient aussi à  $\mathcal{J}$  ;
- d) il existe dans  $\mathcal{J}$  un recouvrement dénombrable de  $[0, \infty[$ .

Alors  $[0, \infty[$  appartient aussi à  $\mathcal{J}$ .

DEMONSTRATION. La démonstration se fera en plusieurs étapes.

- 1) Si  $T$  est un temps d'arrêt (prévisible), son graphe appartient à  $\mathcal{J}$ .

En effet si  $(J_n)$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{J}$  recouvrant  $[0, \infty[$ , les intervalles  $A_n = [T] \cap J_n \cap (\bigcap_{m < n} J_m^c)$  appartiennent aussi à  $\mathcal{J}$  car  $A_n \subset J_n$ . En utilisant les propriétés b) et c) on montre aisément que  $[T] = \bigcup_n A_n$  appartient aussi à  $\mathcal{J}$ .

2) Dans le cas optionnel on désigne par  $\mathcal{J}'$  les éléments de  $\mathcal{J}$  qui sont prévisibles. Alors  $\mathcal{J}'$  vérifie les propriétés a), b) et c). Montrons qu'il existe aussi un recouvrement dénombrable de  $[0, \infty[$  par des éléments de  $\mathcal{J}'$ . Si  $(J_n)$  est une suite d'intervalles de  $\mathcal{J}$  recouvrant  $[0, \infty[$ , on appelle  $S_n$  et  $T_n$  ses extrémités gauche et droite et on voit que l'intervalle prévisible  $]S_n, T_n]$  appartient à  $\mathcal{J}'$ . Comme  $(\cup]S_n, T_n])^c$  est prévisible et à coupes dénombrables, il existe une suite de temps d'arrêt prévisibles  $(U_n)$  qui recouvrent cet ensemble. Ainsi les intervalles  $[U_n]$  et  $]S_n, T_n]$  recouvrent  $[0, \infty[$  et appartiennent à  $\mathcal{J}'$  d'après 1).

3) Nous allons maintenant établir le lemme dans le cas prévisible et le cas optionnel s'en déduira compte tenu de 2). Si  $J$  est un intervalle de  $\mathcal{J}$  ayant pour extrémités  $S$  et  $T$ ,  $]S, T] \cap J^c$  est le graphe d'un temps d'arrêt prévisible que nous noterons  $T'$ . D'après 1)  $[T']$  appartient à  $\mathcal{J}$  et d'après les propriétés a) et b)  $]S, T]$  qui est contenu dans  $J \cup [T']$  appartient aussi à  $\mathcal{J}$ . On en déduit qu'il existe un recouvrement dénombrable de  $[0, \infty[$  par des intervalles de la forme  $[U_n]$  et  $]S_n, T_n]$ . Si  $]S, R]$  et  $]S, T]$  sont deux intervalles de  $\mathcal{J}$ ,  $]S, R \vee T] = ]S, R] \cup ]R_{\{R < T\}}, T]$  appartient aussi à  $\mathcal{J}$  grâce aux propriétés a) et b). A chaque temps d'arrêt  $S$  nous associons la borne supérieure essentielle  $T'$  des temps d'arrêt  $T$  tels que  $]S, T]$  appartienne à  $\mathcal{J}$ . L'ensemble précédent étant stable pour le sup., il existe une suite de temps d'arrêt  $(T_p)$  tendant en croissant vers  $T'$  telle que  $]S, T_p]$  appartienne à  $\mathcal{J}$  pour tout  $p$ , si bien que  $]S, T']$  appartient à  $\mathcal{J}$  d'après c) et 1). Nous appliquons maintenant ce procédé aux temps d'arrêt  $S_n$  définis précédemment et nous continuerons à noter  $]S_n, T_n]$  les intervalles agrandis qui jouissent de la propriété suivante notée (\*): si deux tels intervalles ont une intersection non vide, leurs extrémités droites sont confondues. En effet l'intervalle

$]S_n, T_n] \cup ]T_n, \{S_p < T_n \leq T_p\}, T_p]$  appartient à  $\mathcal{J}$ , donc  $T_n = T_p$  par définition de la borne supérieure sur l'ensemble  $\{S_p < T_n \leq T_p\}$ . Comme  $T_n$  et  $T_p$  jouent des rôles symétriques,  $T_n = T_p$  sur l'ensemble des  $\omega$  où l'intersection des deux intervalles est non vide. Si on pose  $T = \inf\{T_n \mid T_n > T_1\}$  les intervalles  $]S_n, \{S_n > T_1\}, T]$  qui appartiennent à  $\mathcal{J}$ , recouvrent  $]T_1, T]$ . Or lorsque  $]S, T]$  et  $]S', T]$  sont des éléments de  $\mathcal{J}$ ,  $]S \wedge S', T]$  qui est égal à  $]S, \{S < S'\}, S'] \cup ]S', T]$  appartient aussi à  $\mathcal{J}$ . Par conséquent  $]T_1, T]$  qui est la limite croissante d'une suite d'éléments de  $\mathcal{J}$ , appartient aussi à  $\mathcal{J}$ , c'est-à-dire  $T_1 = T$  par définition de  $T_1$ . Appliquant le même raisonnement à chaque  $T_n$ , on en déduit que l'adhérence de l'ensemble aléatoire  $A = \cup [T_n]$  qui est contenue dans la réunion des graphes des  $S_n$ ,  $T_n$  et  $U_n$  en vertu de la propriété (\*), est un parfait aléatoire dénombrable et sans points isolés, donc vide d'après le théorème de Baire. Ainsi  $T_n = \infty$  p.s. pour tout  $n$ . Pour conclure la démonstration du lemme on remarque que  $[0]$  appartient évidemment à  $\mathcal{J}$ , que  $]0, \infty[$  est la limite d'une suite croissante d'éléments de  $\mathcal{J}$  obtenus à partir des intervalles  $]S_n, \infty[$  (cf. le raisonnement concernant  $]T_1, T]$ ) et que  $]0, \infty[$  est la réunion disjointe de  $[0]$  et de  $]0, \infty[$ .

#### UN CONTRE -EXEMPLE.

Rappelons d'abord quelques notations et définitions tirées de [1]. Si  $f$  est une fonction càdlàg, on peut définir une mesure simplement additive  $df$  sur les intervalles bornés par :

$$df([0, t]) = f(t) ; df([0, t[) = f(t-)$$

et pour chaque intervalle  $J$  une nouvelle fonction  $f^J = df(J \cap [0, t])$ . On dira qu'un processus prévisible  $H$  est pseudo-intégrable par rapport à la semimartingale  $X$  s'il existe un processus càdlàg  $Y$  et une suite  $(J_n)$  d'intervalles optionnels recouvrant  $]0, \infty[$  telle que pour tout  $n$ ,  $H$  soit intégrable par rapport à la semimartingale  $X^{J_n}$  et qu'on ait l'égalité  $Y^{J_n} = H \cdot (X^{J_n})$ . Le lemme précédent montre immédiatement que pour  $X$  et  $H$  donnés le processus  $Y$  est unique, ce qui nous permettra d'appeler

Y la pseudo-intégrale de H par rapport à X. Soit  $(G_t)$  une filtration telle que pour tout t on ait l'inclusion  $\mathfrak{F}_t \subset G_t$  et que X soit aussi une semimartingale par rapport à la filtration  $(G_t)$ . Est-ce-que H reste pseudo-intégrable par rapport à X dans la filtration  $(G_t)$ ? L'exemple 2 de [2] nous fournira une réponse négative. Soit B un mouvement brownien réel issu de 0, relativement à sa filtration naturelle  $(\mathfrak{F}_t)$ , rendue continue à droite et complétée. Nous désignons par  $(L_t)$  le processus du temps local de B en 0, par  $(G_t)$  la filtration obtenue en adjoignant à  $\mathfrak{F}_0$  toutes les variables aléatoires  $L_t$ . Si  $X = B.B$ , le processus prévisible  $H = B^{-1} 1_{\{B \neq 0\}}$  est intégrable par rapport à X dans la filtration  $(\mathfrak{F}_t)$  et l'intégrale  $H.X$  est égale à B d'après l'associativité des intégrales stochastiques. Supposons que H soit pseudo-intégrable par rapport à X dans la filtration grossie (on sait d'après un résultat de Jeulin que X reste une semimartingale dans  $(G_t)$ ). Il existe alors un processus càdlàg Y et des intervalles optionnels  $J_n$  recouvrant  $[0, \infty[$  tels que  $Y^{J_n} = H.(X^{J_n})$ . Ainsi Y sera une semimartingale dans l'ouvert aléatoire  $\bigcup_n \overset{\circ}{J}_n$ ,  $\overset{\circ}{J}_n$  désignant l'intérieur de l'intervalle  $J_n$ : en effet si  $u < v$  sont deux rationnels et si la loi P est restreinte à l'ensemble des  $\omega$  tels que  $]u, v]$  soit contenu dans  $J_n$ ,  $Y^{]u, v]} = H.X^{]u, v]} = B^{]u, v]}$ ; en faisant varier n, u et v et en appliquant le théorème de convexité 11 de [2], on voit aisément que Y est une semimartingale dans  $\bigcup_n \overset{\circ}{J}_n$  dont le complémentaire est à coupes dénombrables. La continuité de B et Y (X est une semimartingale continue) et l'égalité  $B^{J_n} = Y^{J_n}$  entraînent que  $B = Y$ , ce qui contredit le fait que  $\{B \neq 0\}$ , dont le complémentaire est à coupes non dénombrables, est l'ouvert maximal dans lequel B est une semimartingale par rapport à la filtration  $(G_t)$ .

## REFERENCES

- [1] EMERY M. : A generalization of stochastic integration with respect to semimartingales. A paraître dans Annals of Probability.  
 [2] MEYER P.A. et STRICKER C. : Sur les semimartingales au sens de L. SCHWARTZ. Math. An. and Appl. part B, Adv. in Math. Suppl. Studies, vol. 7B (1981), 577-602.