Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Ching Sung Chou

Une remarque sur l'approximation des solutions d'e.d.s

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 409-411
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__409_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1981/82

UNE REMARQUE SUR L'APPROXIMATION DES SOLUTIONS D'E.D.S.

par CHOU Ching - Sung

Considérons une équation différentielle stochastique vectorielle du type suivant :

$$(1) \qquad Y_{it} = y_i + \Sigma_j \int_0^t a_{ij}(X_{s-},Y_{s-})dX_{js} \qquad \begin{array}{l} i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,p \end{array}$$

où les X_j sont des semimartingales données, et où les coefficients $a_{ij}(x,y)$ sont des fonctions uniformément lipschitziennes en y, et par exemple continues en (x,y). Construisons la suite de ses approximations par la méthode des différences finies, au moyen des subdivisions dyadiques :

$$(2) \qquad \overset{n}{Y}_{it} = y_i + \Sigma_j a_{ij}(X_0,y)(X_{j,t}-X_{j,0}) \quad \text{pour } 0<t\leqq 2^{-n}$$

$$\overset{n}{Y}_{it} = \overset{n}{Y}_{i,2^{-n}} + \Sigma_j a_{ij}(X_{2^{-n}},\overset{n}{Y}_{2^{-n}})(X_{j,t}-X_{j,2^{-n}}) \quad \text{pour } 0<t\leqq 2.2^{-n}$$

$$\overset{n}{Y}_{it} = \overset{n}{Y}_{i,k2^{-n}} + \Sigma_j a_{ij}(X_{k2^{-n}},\overset{n}{Y}_{k2^{-n}})(X_{j,t}-X_{j,k2^{-n}}) \quad \text{pour } k2^{-n}<t\leqq(k+1)2^{-n} .$$

M. Emery a démontré que le processus $(\overset{n}{Y}_t)$ converge vers (Y_t) au sens u.c.p. (convergence uniforme sur les compacts en probabilité). C'est à dire que pour tout t fixé et tout i, $(Y-\overset{n}{Y})^*_t$ converge en probabilité vers 0.

M. Meyer a posé le problème suivant : au lieu de (1) considérons l'équation différentielle avec un terme supplémentaire de crochets :

$$(3) \qquad Y_{it} = (1) + \Sigma_{j,k} \int_0^t b_{ijk}(X_{s-},Y_{s-})d[X_j,X_k]_s$$

où les fonctions b_{ijk} sont aussi lipschitziennes . Cette équation est encore du type (1), mais avec un plus grand nombre de semimartingales directrices. Au lieu de construire les processus $\overset{n}{Y}_t$, qui exigent que l'on connaisse les crochets, on considère l'approximation suivante, qui contient seulement les processus X_{it} eux mêmes :

$$(4) \qquad \overset{n}{Z}_{it} = y_i + \Sigma_j a_{ij}(X_0,y)(X_{jt}-X_{j0}) + \Sigma_{jk} b_{ijk}(X_0,y)(X_{jt}-X_{j0})(X_{kt}-X_{k0}) \quad \text{pour } 0<t\leqq 2^{-n}$$

$$\overset{n}{Z}_{it} = \overset{n}{Z}_{i,p2^{-n}} + \Sigma_j\, a_{ij}(X_{p2^{-n}},\overset{n}{Z}_{p2^{-n}})(X_{j,t}-X_{j,p2^{-n}})$$
$$+ \Sigma_{jk}\, b_{ijk}(X_{p2^{-n}},\overset{n}{Z}_{p2^{-n}})(X_{j,t}-X_{j,p2^{-n}})(X_{k,t}-X_{k,p2^{-n}})$$
$$\text{pour } p2^{-n}<t\leqq(p+1)2^{-n}$$

Le problème posé par M. Meyer est alors : est ce que $\overset{n}{Z}$ converge aussi vers la solution Y de (3) au sens u.c.p.? Nous allons montrer que c'est bien le cas.

La méthode consiste à considérer l'équation du type (3) comme une équation du type (1) , mais avec les semimartingales directrices X_{it} et $X_{jt}X_{kt}$ au lieu des crochets, grâce à la formule

$$d[X_j,X_k] = d(X_jX_k) - X_{j-}dX_k - X_{k-}dX_j$$

L'équation (3) s'écrit donc

$$(5)\qquad Y_{it} = y_i + \Sigma_j \int_0^t c_{ij}(X_{s-},Y_{s-})dX_{js}$$
$$+ \Sigma_{jk} \int_0^t b_{ijk}(X_{s-},Y_{s-})d(X_{js}X_{ks})$$

avec
$$c_{i\ell}(x,y) = a_{i\ell}(x,y) + \Sigma_j\, b_{ij\ell}(x,y)x_j + \Sigma_k\, b_{i\ell k}(x,y)x_k$$

Si on considère l'approximation du type (2) pour l'équation (5) - pour la simplicité nous écrivons seulement le premier terme, pour $t\leqq 2^{-n}$

$$y_i + \Sigma_\ell\, c_{i\ell}(X_0,y)(X_{\ell t}-X_{\ell 0}) + \Sigma_{jk}\, b_{ijk}(X_0,y)(X_{jt}X_{kt}-X_{j0}X_{k0})$$

on retrouve exactement $\overset{n}{Z}_{it}$. Cependant, il y a une petite difficulté pour appliquer le théorème d'Emery à l'équation (5), car les coefficients $c_{i\ell}(x,y)$ ne sont pas lipschitziens.

On peut résoudre cette difficulté de la manière suivante : supposons d'abord que chaque coordonnée X_{it} soit une semimartingale bornée en valeur absolue par une constante K . Soit $x'_j = x_j$ si $|x_j|\leqq K$, K si $x_j>K$, $-K$ si $x_j<-K$. Soit aussi

$$c'_{i\ell}(x,y) = a_{i\ell}(x,y) + \Sigma_j\, b_{ij\ell}(x,y)x'_j + \Sigma_k\, b_{i\ell k}(x,y)x'_k$$

Alors on peut appliquer le théorème d'Emery à l'équation (5') obtenue en remplaçant les fonctions $c_{i\ell}$ par les fonctions lipschitziennes $c'_{i\ell}$. Mais comme les X_{it} sont bornés par K, l'équation (5) et l'équation (5') ont mêmes solutions et mêmes approximations, et la réponse à la question de M. Meyer est positive.

Pour le cas général, on introduit le temps d'arrêt

$$T = T_K = \inf\{\ t : \sup_i\ |X_{it}| > K\ \}$$

La semimartingale X^{T-} est alors bornée par K pour chaque coordonnée, et on peut lui appliquer le résultat précédent. Cela entraîne que

$$(\overset{n}{Z}-Y)^*_t \to 0 \text{ en probabilité sur l'ensemble } \{t<T\}$$

Mais si K est grand, l'ensemble $\{t\geq T\}$ a une probabilité très petite, donc en fait on a encore convergence u.c.p..

REFERENCES

[1]. EMERY (M.). Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques. Application aux intégrales multiplicatives stochastiques. Z.W. 41, 1978, p. 41-62.

[2]. EMERY(M.). Equations différentielles stochastiques lipschitziennes. Etude de la stabilité. Sém. Prob. XIII, LN. 721, Springer 1979.

C.S. Chou
Mathematics Department
National Central University
Chung-Li, TAIWAN.