Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Paul-André Meyer

Sur la méthode de L. Schwartz pour les e.d.s

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 108-112

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__108_0>

SUR LA MÉTHODE DE L. SCHWARTZ POUR LES É.D.S.

par P.A. MEYER

On trouvera dans le *Sém. Prob. XXIII* une note très intéressante de L. Schwartz, qui réduit à presque rien la théorie des é.d.s. à semimartingales directrices continues en prouvant la convergence p.s. sur toute la droite (et très rapide) de la méthode des approximations successives. On peut signaler une idée analogue chez Karandikar [1] : il y manque un détail technique (l'insertion d'un facteur exponentiel, empruntée à Feyel [1]) qui permet à Schwartz de tout simplifier. Nous nous proposons ici de rajouter encore un demi morceau de sucre dans la tasse, et de faire la même chose pour les semimartingales discontinues. Il faut pour cela deux résultats auxiliaires : le théorème général de structure des martingales locales, et surtout l'"inégalité de Doob" de Métivier–Pellaumail. C'est une occasion de rappeler leur livre très riche de 1979, que l'on aurait tort d'oublier devant la floraison actuelle d'ouvrages sur le calcul stochastique.

Pour simplifier les notations, nous nous plaçons dans le cas scalaire avec une seule semimartingale directrice, mais la méthode s'applique au cas général.

Notations. La semimartingale directrice Z, nulle en 0, admet la décomposition canonique $Z = M + V$. En appliquant à M le théorème de structure des martingales locales (Dellacherie–Meyer, *Probabilités et Potentiel B,* VI.85), on peut choisir une décomposition pour laquelle M est *localement de carré intégrable* (et même à sauts bornés). Cela servira plus loin de manière essentielle.

On se propose de résoudre l'équation différentielle stochastique

$$X_t = H_t + \int_0^t FX_{s-}\,dZ_s\ , \tag{1}$$

où H est un processus càdlàg. adapté donné, et F est une application de l'espace des processus càdlàg. adaptés dans lui même, possédant les propriétés $F0 = 0$ et

$$(FX - FY)^*_{T-} \le K\,|\,X - Y\,|^*_{T-} \tag{2}$$

(condition de Lipschitz) pour tout temps d'arrêt T. Rappelons deux cas particuliers importants. Dans le cas classique des é.d.s. de type "markovien"

$$X_t = x + \int_0^t f(X_{s-})\,dX_s$$

on a $FX_t = f(X_t) - f(0)$ et $H_t = x + f(0)\,Z_t$. D'autre part, si U et V sont deux solutions de la même é.d.s. avec des "conditions initiales" différentes

$$U = H + FU_{-}\cdot Z\ , \quad V = K + FV_{-}\cdot Z\ ,$$

leur différence $W = V - U$ est solution d'une équation

$$W = L + GW_{-}\cdot Z$$

avec $L = K - H$, $GX = F(U + X) - F(U)$.

Nous tentons de résoudre l'é.d.s par la méthode de Picard en posant

$$X^{-1} = 0\ , \quad X^0 = H\ , \quad X^{n+1} = H + FX^n_{-}\cdot Z$$

que nous transformons en série en posant $Y^0 = X^0 = H$, $Y^n = X^n - X^{n-1}$, soit pour $n \geq 0$

$$(3) \qquad Y^{n+1} = (FX^n_{-} - FX^{n-1}_{-})\cdot Z\ .$$

Le point crucial est que le processus intégré du côté droit est majoré en valeur absolue par $K\,|\,Y^{*n}_{-}\,|$, d'après la condition de Lipschitz.

Le lemme fondamental (1). Pour la commodité du lecteur, nous redémontrons d'abord le lemme fondamental sous la forme de Schwartz.

LEMME. *Supposons que l'on ait* $d{<}M,M{>}_t \leq dt$, $|dV_t| \leq dt$. *Soit* $K = J\cdot Z$ *où le processus prévisible* J *satisfait à*

$$(4) \qquad \|\,J_s\,\|_2 \leq Ce^{\lambda s}\,(s^n/n!)^{1/2}\ ,$$

avec $\lambda > 0$. *Alors on a*

$$(5) \qquad \|\,K^*_t\,\|_2 \leq C(2 + 1/\sqrt{2\lambda})e^{\lambda t}\,(t^{n+1}/(n+1)!)^{1/2}\ .$$

DÉMONSTRATION. La norme à gauche est majorée par la somme des normes des deux termes provenant de M et V. Pour le premier terme on applique l'inégalité de Doob dans L^2, ce qui nous laisse

$$2\mathbb{E}\,[\int_0^t J_s^2\, d{<}M,M{>}_s\,]^{1/2}\ .$$

On majore $d{<}M,M{>}$ par ds, on intervertit les deux intégrations, on majore $\mathbb{E}\,[J_s^2]$ par (4), et $e^{2\lambda s}$ par $e^{2\lambda t}$.

Pour le second terme, on doit regarder la norme$_2$ de $\int_0^t |J_s|\,|dV_s|$. On majore $|dV_s|$ par ds, puis on majore la norme de l'intégrale par l'intégrale de la norme, on utilise (4), et on applique l'inégalité de Schwarz aux facteurs $Ce^{\lambda s}$ et $(s^n/n!)^{1/2}$, et le premier facteur donne le coefficient $1/\sqrt{2\lambda}$. Le reste est évident.

Une fois le lemme fondamental établi, on remarque que si l'on a au départ une majoration du type $\|\,H_t\,\|_2 \leq Ce^{\lambda t}$ (évidente par exemple dans le cas "markovien" d'après les hypothèses faites sur Z), on obtient par récurrence sur n la convergence normale de la série de Picard sur tout intervalle borné, comme dans l'article de Schwartz.

Le lemme fondamental permet aussi d'établir l'unicité de la solution, mais pour prouver celle-ci sans conditions L^2, il faut un argument simple de prélocalisation.

REMARQUE. Schwartz établit aussi une version L^p ($p > 2$) du lemme fondamental, indispensable pour la démonstration du théorème sur les flots stochastiques (par application du lemme de Kolmogorov). Le raisonnement est le même, mais il faut utiliser une inégalité de Burkholder, ce qui exige l'emploi du crochet droit, et donc (contrairement au cas $p = 2$) la continuité de M.

Le lemme fondamental (2). Supprimons l'hypothèse sur Z, et analysons la méthode de changement de temps utilisée par Schwartz (et dont la première mention est due, à ma connaissance, à Karandikar [1]). Comme nous allons le voir, il ne s'agit pas d'un "vrai" changement de temps, où l'on modifie les tribus, etc., mais d'une opération beaucoup plus simple. Considérons un processus croissant A tel que $d{<}M{>}_t \leq dA_t$, $|dV_t| \leq dA_t$ — par exemple

$$A_t = {<}M{>}_t + \int_0^t |dV_s| + t$$

qui est agréable, parce que strictement croissant et tendant vers l'infini. Associons lui la famille de temps d'arrêt (ici bornés, tendant vers l'infini avec t)

$$c_t = \inf\{u : A_u > t\}.$$

Nous essayons, dans la démonstration du lemme fondamental, de remplacer l'hypothèse (4) par

$$\| J_{c_s} \|_2 \leq C e^{\lambda s} (s^n/n!)^{1/2}, \tag{6}$$

et d'en déduire l'inégalité

$$\| K^*_{c_t} \|_2 \leq C(2 + 1/\sqrt{2\lambda}) e^{\lambda t} (t^{n+1}/(n+1)!)^{1/2}, \tag{7}$$

qui rendrait exactement les mêmes services que le lemme fondamental pour la théorie des é.d.s.. Nous reprenons donc la démonstration précédente, mais en travaillant cette fois à l'instant c_t : nous avons deux termes

$$2E[\int_0^{c_t} J_s^2 d{<}M{>}_s]^{1/2}, \quad \mathbb{E}[(\int_0^{c_t} |J_s||dV_s|)^2]^{1/2}$$

dans lesquels nous majorons les deux processus croissants par dA_s. Nous remplaçons alors les deux expressions par

$$2E[\int_0^\infty J_{c_s}^2 I_{\{c_s \leq c_t\}} ds]^{1/2}, \quad \mathbb{E}[(\int_0^\infty |J_{c_s}| I_{\{c_s \leq c_t\}} ds)^2]^{1/2}.$$

Voir Dellacherie–Meyer, *Probabilités et Potentiel B,* VI.55. Si nous pouvions remplacer la condition $c_s \leq c_t$ par $s \leq t$, la démonstration fonctionnerait exactement comme ci-dessus.

Mais en fait la condition équivalente à $c_s \leq c_t$ est $s \leq A_{c_t}$, et on a $A_{c_t-} \leq t \leq A_{c_t}$, l'égalité n'ayant lieu pour tout t que si A est continu. Pour retomber sur un intervalle d'intégration contenu dans $[0,t]$, il faut donc remplacer l'indicatrice par $I_{\{c_s<c_t\}}$, et alors on se trouve devant le problème de démontrer une "inégalité de Doob" sur les intervalles stochastiques $[0,c_t[$ ouverts. La réponse a été donnée par Métivier-Pellaumail : pour tout t. d'a. $T>0$ on a

$$\| M^*_{T-} \|_2 \leq 2\mathbb{E}[\, [M,M]_{T-} + <M,M>_{T-}]^{1/2} \,.$$

Il suffit donc d'ajouter encore le crochet droit $[M,M]_t$ à (A_t) pour que la démonstration fonctionne comme plus haut, les formules (J.1) et (J.2) devant être remplacées par des majorations portant sur $\| J_{c_t-} \|$ et $\| K^*_{c_t-} \|$.

Il suffirait d'ailleurs de traiter le cas où J est continu à gauche, ce qui évite de distinguer J_{c_t-} et J_{c_t-}.

REMARQUES. a) Le premier à avoir utilisé simultanément la méthode du changement de temps et l'inégalité de M–P, pour établir la convergence p.s. de la série de Picard sur toute la droite pour des semimartingales discontinues, semble être Karandikar [2]. Voir dans ce volume un résultat analogue pour la méthode d'Euler–Peano.

b) L'inégalité de Métivier-Pellaumail est loin d'être évidente. Il peut donc être intéressant de s'en passer dans certains cas particuliers, pour des raisons pédagogiques. Le premier cas est évidemment celui où $<M>$ et V sont continus (ce qui n'exige pas, rappelons le, que M le soit). Le second cas, un peu plus général, est celui où $d<M>$ et $|dV|$ sont majorés par dB, le processus croissant B (à valeurs finies) étant *prévisible*. En effet, prenant $A_t = B_t + t$, on a

$$c_{t-} = \inf\{u \,:\, A_u \geq t\}$$

qui est un temps prévisible en tant que début d'un ensemble prévisible fermé à droite. Or l'inégalité de Doob ordinaire s'étend de manière évidente à un intervalle prévisible $[0,T[$, au moyen d'une suite annonçant T.

c) Stricker m'a fait remarquer que l'on peut en fait éviter *complètement* l'inégalité de M–P pour la théorie L^2 (non pour la théorie L^p, voir d)). On commence par un changement de loi qui fait entrer la semi-martingale directrice dans H^2 sur tout intervalle fini. Après cela, la semimartingale admet une décomposition canonique $M+V$, M admettant un crochet oblique et V étant prévisible, et l'on se trouve alors dans la situation de b).

d) Pour appliquer la méthode de Schwartz à la régularité des solutions des équations différentielles stochastiques gouvernées par des semimartingales discontinues, il faut utiliser le théorème de Kolmogorov, et donc étendre à L^p l'inégalité de Métivier–Pellaumail. Cela ne pose pas de difficulté (le lemme de Lenglart–Lepingle–Pratelli fait le travail tout seul), mais je ne me rappelle plus qui a établi le premier ce résultat.

RÉFÉRENCES

FEYEL (D.) [1]. Sur la méthode de Picard (é.d.o. et é.d.s.) pour les é.d.s., *Sém. Prob. XXI*, LN in M. **1247**, 1987, p. 515-519.

KARANDIKAR (R.L.) [1]. A.S. approximation results for multiplicative stochastic integrals, *Sém. Prob. XVI,* LN in M. **920**, 1982, p. 384-391.

KARANDIKAR (R.L.) [2]. On Métivier–Pellaumail inequality, Emery topology and pathwise formulae in stochastic calculus, *Sankhyā*, *Ser. A*, **51**, 1989, p. 121-143.

LENGLART (E.) [1]. Sur l'inégalité de Métivier–Pellaumail, *Sém. Prob. XIV,* LN in M. **784**, 1980, p. 125-127.

MÉTIVIER (M.) et PELLAUMAIL (J.) [1]. *Stochastic Integration,* Academic Press, 1979.

SCHWARTZ (L.) [1]. La convergence de la série de Picard pour les é.d.s., *Sém. Prob. XXIII,* LN in M. **1372**, 1989, p. 343–354.