Jean-Pascal Ansel
Christophe Stricker

Décomposition de Kunita-Watanabe

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 30-32
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__30_0>

DÉCOMPOSITION DE KUNITA-WATANABE

par J.P. Ansel et C. Stricker

1. Introduction :

On se propose de faire ici un bilan des connaissances sur la décomposition de Kunita-Watanabe, apparue dans l'étude des sous-espaces de $\mathcal{M}^2$ (voir Kunita-Watanabe [4]), et utilisée récemment dans une question de Mathématiques financières sur la couverture des actifs contingents (voir [1] et [3]).

L'objet de cette décomposition est l'écriture d'une martingale locale N comme la somme de deux martingales locales, l'une appartenant au sous-espace stable engendré par une martingale locale M d-dimensionnelle, et l'autre étant orthogonale au sens du crochet droit à chaque composante de M.

Après des rappels sur l'intégrale stochastique vectorielle, nous explicitons quatre situations où l'on peut confirmer ou infirmer l'existence de cette décomposition.

2. Intégrales stochastiques par rapport à une martingale locale vectorielle :

Nous donnons ici la construction de Jacod [2] sur l'intégrale stochastique vectorielle. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. Les vecteurs x de $\mathbf{R}^d$ seront identifiés à des matrices $d \times 1$, x^* désignera la transposée de x et $\|x\|^2 := x^*x$. L'intégrale stochastique vectorielle (voir Jacod [2] pour une définition précise) du processus prévisible H à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ est notée $(H^*.X)_t$. Nous conviendrons que $(H^*.X)_0 = 0$. Pour $q \geq 1$, $\mathcal{H}^q$ désigne l'espace vectoriel des martingales M telles que $E[\sup_t \|M_t\|^q] < +\infty$. Il est bien connu que $\mathcal{H}^q$ est un espace de Banach si on le munit de la norme $\|M\|_{\mathcal{H}^q} := \left(E[\sup_t \|M_t\|^q]\right)^{1/q}$.

On dit que $\mathcal{H}$ est un sous-espace stable de $\mathcal{H}^q$ si c'est un sous-espace vectoriel fermé tel que $1_A M^T \in \mathcal{H}$ pour tout $M \in \mathcal{H}, A \in \mathcal{F}_0$ et T temps d'arrêt. Pour que $\mathcal{H}$ soit stable il faut et il suffit qu'il soit fermé et stable par intégration stochastique.

Soit $M = (M^i)_{1\leq i\leq d}$ une martingale locale à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ et telle que pour tout $i, M^i \in \mathcal{H}^q_{\text{loc}}$. On sait qu'il existe un processus à variation intégrable A et une matrice optionnelle a telle que $[M, M^*] = a.A$. On définit les ensembles suivants :

$L^q(M^i) = \{H^i \text{ prévisible} \; ; \; E[((H^i)^2.[M^i, M^i]_\infty)^{q/2}] < +\infty\}$.

$L^{q,0}(M) = \{H \text{ prévisible à valeurs dans } \mathbf{R}^d \; ; \; H^i \in L^q(M^i), 1 \leq i \leq d\}$.

$$\mathcal{L}^{q,0}(M) = \{H^*.M := \sum_{i=1}^{d} H^i.M^i \; ; \; H \in L^{q,0}(M)\}.$$

$L^q(M) = \{H$ prévisible à valeurs dans $\mathbf{R}^d$; $\|H\|_{L^q(M)} := E[((H^* aH).A)^{q/2}] < +\infty\}$.

$L^q(M)$ est la complétion de $L^{q,0}(M)$ pour la semi-norme $\|.\|_{L^q(M)}$, et pour $H \in L^q(M)$ on peut définir l'intégrale stochastique $H^*.M$. Si $\mathcal{L}^q(M)$ désigne la fermeture dans $\mathcal{H}^q$ de $\mathcal{L}^{q,0}(M)$ c'est aussi le sous-espace stable engendré par M et $\mathcal{L}^q(M) = \{H^*.M \ ; \ H \in L^q(M)\}$.

Nous dirons que la martingale locale L est orthogonale à la martingale locale $M = (M^i)_{1 \le i \le d}$ si le crochet $[L, M^i]$ est une martingale locale pour tout i ; $1 \le i \le d$.

3. Décomposition de Kunita-Watanabe :

Soient N une martingale locale réelle et M une martingale locale à valeurs dans $\mathbf{R}^d$. On appelle décomposition de Kunita-Watanabe de N sur M une décomposition de la forme $N_t = N_0 + H^*.M_t + L_t$ où $H \in L_{loc}(M)$ et L est une martingale locale orthogonale à M. Cette décomposition est évidemment unique.

Voici maintenant les quatre situations évoquées dans l'introduction. On suppose $N_0 = 0$.

D.K.W. cas 1 :
D'après Jacod [2] on a le résultat suivant :

Lorsque M et N sont localement de carré intégrable, alors la décomposition existe.

D.K.W. cas 2 :
Lorsque N est de carré intégrable mais M est quelconque, il existe un contre-exemple (décrit dans Jacod [2]). Supposons que $\mathcal{F}_0$ est la tribu dégénérée et considérons la filtration $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0$ pour $t < \frac{1}{2}$ et $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ pour $t \ge \frac{1}{2}$. On remarque que si H est un processus prévisible, alors H est égal à une constante h sur $[0, \frac{1}{2}]$, et si T est un t.a. alors $P\{T < \frac{1}{2}\} = 0$ ou 1. Ainsi toute martingale locale est une martingale et elle s'écrit $M_t = E[M_1]\, 1_{[0,1/2[} + M_1 1_{[1/2,1]}$.

Soient maintenant U et V deux v.a. centrées avec $E[V^2] < +\infty, E[U^2] = +\infty$ et $E[UV] \neq 0$. Posons $M = U\,1_{[1/2,1]}$ et $N = V\,1_{[1/2,1]}$. M et N ne sont pas orthogonales car $E[U\,V] \neq 0$, donc s'il existe une décomposition de Kunita-Watanabe $N = H.M + L$ alors $H \neq 0$ et $H.M = hU\,1_{[1/2,1]}, L = Z\,1_{[1/2,1]}$ avec $E[UZ] = 0$. Ainsi $V = hU + Z$ et $E[V^2] = h^2 E[U^2] + E[Z^2]$ ce qui est impossible si $h \neq 0$.

D.K.W. cas 3 :
Lorsque N est quelconque mais que M est continue, alors la décomposition existe. En effet on peut écrire N sous la forme $N = N^c + N^d$ où N^c est la partie continue de N, N^d la partie purement discontinue. N^d est orthogonale à toute martingale locale continue et N^c est localement borné donc localement de carré intégrable, on lui applique la DKW cas 1. $N^c = H^*.M + U$ avec U orthogonale à M et $H \in L_{loc}(M)$. Il suffit de poser $L = U + N^d$ et $N = H^*.N + L$ convient.

D.K.W. cas 4 :
Malheureusement on ne peut pas généraliser le résultat précédent lorsque M n'est pas continue mais simplement localement borné comme le montre l'exemple suivant :

Soient B un mouvement brownien et P un processus de Poisson compensé. Posons $M = B + P$ et soit $f \in L^1([0,1]) \setminus L^2([0,1])$ alors $N = f.P$ (intégrale au sens de Stieltjes) est une martingale locale : en effet il suffit de montrer que N est dans $\mathcal{H}^1_{loc}$ et donc que $(f^2.[P,P])^{1/2}$ est localement de carré intégrable. Soit $(T_n)_{\mathbb{N}}$ la suite des instants de sauts de P, on suppose que $\Delta P_{T_n} = 1$, alors

$[P,P]_t = \sum_{s\leq t} \Delta N_s^2 = \sum_n 1_{[T_n,+\infty[}(t)$ et $f^2.[P,P]_t = \sum_n f^2(T_n) 1_{[T_n,+\infty[}(t)$.

Or $(f^2.[P,P]_t)^{1/2} \leq \sum_n |f(T_n)| 1_{[T_n,+\infty[}(t) = |f|.[P,P]_t$ et $E[(|f|.[P,P])_t] = \int_0^t |f_s| ds$.

Ainsi N est une martingale locale et si on peut écrire $N = H.M + L$ avec $\langle L, M\rangle = 0$ alors $H = \frac{d\langle N,M\rangle}{d\langle M,M\rangle} = \frac{f}{2}$ et $L = \frac{f}{2}.(P - B)$ mais f n'est pas intégrable relativement à B. Il n'y a donc pas de décomposition de Kunita-Watanabe.

Remarque : Dans les questions de Mathématiques financières, la martingale locale que l'on cherche à décomposer est souvent positive. L'exemple ci-dessus reste valable en prenant f positive et $N = \int_0^1 f(s)ds + f.P$.

Bibliographie

[1] J.P. Ansel, C. Stricker :
Couverture des actifs contingents (1992). A paraître.

[2] J. Jacod :
Calcul stochastique et problème de martingales. Lect. Notes Math., n° 714. Springer 1979.

[3] N. El Karoui, M.C. Quenez :
Dynamic Programming and Pricing of Contingent claims in an Incomplete Market. A paraître.

[4] H. Kunita, S. Watanabe :
On square integrable martingales. Nagoya Math. J., 30, 1967, p. 209-245.

Laboratoire de Mathématiques
URA CNRS 741
16, Route de Gray
F - 25030 Besançon Cedex