

SÉMINAIRE "SOPHUS LIE"

M. LAZARD

Théorie des répliques. Critère de Cartan

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 6, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A9_0

© Séminaire "Sophus Lie"
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 6

THÉORIE DES RÉPLIQUES. CRITÈRE DE CARTAN

(Exposé de M. LAZARD, le 14.12.54)

1.- Résultats préliminaires sur les matrices.

Notations. K corps de caractéristique 0

\mathcal{M} espace vectoriel de rang fini sur K

\mathcal{M}^* dual de \mathcal{M}

$\mathcal{M}_{r,s}$ produit tensoriel de r espaces isomorphes à \mathcal{M} et de s espaces isomorphes à \mathcal{M}^*

$\mathfrak{gl}(\mathcal{M})$ est l'algèbre de Lie des endomorphismes de \mathcal{M} .

Si L est un surcorps de K , on désigne par \mathcal{M}^L l'espace vectoriel sur L obtenu par extension du corps des scalaires $\mathcal{M}^L = \mathcal{M} \otimes_K L$. Si X est un K -endomorphisme X^L est le L -endomorphisme de \mathcal{M}^L qui se réduit à X sur $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^L$.

Nous aurons besoin d'un certain nombre de résultats préliminaires sur les endomorphismes X de \mathcal{M} , qui sont d'ailleurs classiques. Faisons d'abord la remarque que le choix d'un endomorphisme X de \mathcal{M} définit une structure de $K[x]$ -module sur \mathcal{M} par la loi $P.m = P(X).m$ ($P \in K[x]$ et x une indéterminée).

Proposition 1. Le bicommutant de X est formé des polynomes en X .

$A = K[x]$ étant un anneau principal, ce résultat est impliqué par le suivant :

M étant un module de type fini sur l'anneau principal A , l'ensemble des endomorphismes du groupe M qui commutent à tous les A -endomorphismes est identique aux homothéties par les éléments de A .

En effet M est somme directe de sous-modules monogènes M_i ($1 \leq i \leq n$) de générateurs e_i , l'annulateur de e_i étant l'idéal α_i de sorte que $\alpha_i \subset \alpha_{i+1}$. Si f commute aux A -endomorphismes, il commute aux projecteurs E_i de la décomposition $M = \sum M_i$ donc f conserve les M_i et $f(e_i) = \lambda_i e_i$ ($\lambda_i \in A$). Mais comme $\alpha_i \subset \alpha_{i+1}$ il existe un A -endomorphisme p et un s_i de M tel que $p(e_i) = e_{i+1}$ ($i < n$) $p(e_n) = 0$. Par suite comme f commute à p :

$$\begin{aligned} f(e_i) &= f(p^{i-1}(e_1)) = p^{i-1} f(e_1) \\ &= \lambda_1 p^{i-1} e_1 = \lambda_1 e_i \end{aligned}$$

Les homothéties sont des A -endomorphismes et f commute donc aux homothéties donc est un A -endomorphisme.

f est l'homothétie de rapport $\lambda_1 \in A$

C.Q.F.D.

Proposition 2. Si X est un endomorphisme de \mathcal{M} les conditions suivantes portant sur X sont équivalentes

- 1). Le $K[x]$ -module \mathcal{M} est semi-simple.
- 2). Il existe un polynôme P sans facteurs multiples tel que $P(X) = 0$
- 3). Si L est la clôture algébrique de K , X^L est réductible à la forme diagonale.

Si l'une de ces conditions est remplie, X est dit semi-simple.

1) \Rightarrow 2) \mathcal{M} est somme directe de modules simples \mathcal{M}_i d'après 1). Soit $e_i \in \mathcal{M}_i$, $e_i \neq 0$. L'annulateur de e_i est un idéal (P_i) . P_i est irréductible : sinon soit $P_i = Q_i \cdot R_i$, $Q_i \cdot e_i = f_i \neq 0$ est annulé par R_i donc engendre un module dont le rang sur K est le degré de R_i donc plus petit que le rang de \mathcal{M}_i sur K . Autrement dit le module engendré par f_i est contenu dans \mathcal{M}_i et distinct de (0) et \mathcal{M}_i contrairement à l'hypothèse que \mathcal{M}_i est simple. Si l'on prend pour P le produit des P_i distincts, $P(X) = 0$ et P est sans facteur multiple.

2) \Rightarrow 3) Puisque P est sans facteur multiple, P se décompose dans L en produit de facteurs linéaires distincts (car K est de caractéristique 0 donc parfait). $P(x) = \prod_i (x - \lambda_i)$. Alors $1 = \sum P_i(x)$ avec

$$P_i(x) = \frac{P(x)}{P'(\lambda_i)(x - \lambda_i)}$$

$E_i = P_i(X^L)$ applique \mathcal{M}^L dans le sous-espace des vecteurs propres associés à la valeur propre λ_i et s'annule sur les vecteurs propres associés à λ_j si $j \neq i$. Par suite les E_i sont des projecteurs deux à deux orthogonaux et X^L se réduit à un scalaire dans $\mathcal{M}_i = E_i \mathcal{M}^L$. Donc X^L est diagonalisable.

3) \Rightarrow 1) Soit \mathcal{N} un sous-module de \mathcal{M} . Pour montrer que \mathcal{N} est semi-simple il faut prouver qu'il existe un projecteur E de \mathcal{M} sur \mathcal{N} qui commute à X . Un tel E est défini par les équations suivantes :

$$(a) \langle En, m' \rangle = \langle n, m' \rangle$$

$$n \in \mathcal{N} \quad m' \in \mathcal{N}^*$$

$$(b) \langle Em, n' \rangle = 0$$

$$m \in \mathcal{M} \quad n' \in \mathcal{N}^\perp \subset \mathcal{M}^*$$

$$(c) \langle EXm, m' \rangle = \langle Em, {}^t X m' \rangle$$

$$m \in \mathcal{M} \quad m' \in \mathcal{M}^*$$

X^L étant diagonalisable, \mathcal{M}^L est semi-simple donc il existe un projecteur E' commutant à X^L de \mathcal{M}^L sur \mathcal{N}^L , mais ceci signifie que les équations linéaires (a) (b) (c) à coefficients dans K ont une solution dans L elles ont donc une

solution dans K .

C.Q.F.D.

Proposition 3. On peut écrire $X = Y + Z$ Y étant semi-simple et Z nilpotent, Y et Z commutant. De plus une telle décomposition est unique et Y et Z s'expriment par des polynômes en X . Tout élément annulé par X est annulé par Y et Z .

Il existe un polynôme f sans facteur multiple et un entier $r > 0$ tel que $f(X)^r = 0$. On va fabriquer des g_i par récurrence sur i pour satisfaire aux congruences

$$(A_q) \quad f(x - \sum_{i=0}^q g_i(x) f^i(x)) \equiv 0 \quad \text{mod } f^{q+1}$$

On prend $g_0 = 0$ et (A_0) est satisfaite. Supposons trouvés $g_0 \dots g_{n-1}$ et posons :

$$P = x - \sum_{i=0}^{n-1} g_i f^i$$

$$(1) \quad f(P(x)) \equiv 0 \quad \text{mod } f^n$$

$$(A_n) \text{ s'écrit } f(P - g_n f^n) \equiv 0 \quad \text{mod } f^{n+1}$$

Mais par la formule de Taylor

$$f(P - g_n f^n) = f(P) - g_n f^n f'(P) + f^{n+1} R$$

or $f(P) = \varphi \cdot f^n$ d'après (1) et il suffira pour g_n de satisfaire à la congruence

$$(B) \quad \varphi - g_n f' \equiv 0 \quad \text{mod } f$$

Or on peut résoudre (B) en g_n car f et f' sont premiers entre eux.

En considérant la congruence (A_{r-1}) on trouve alors

$$(2) \quad f(X - \sum_{i=0}^{r-1} g_i(X) f^i(X)) = 0 \quad \text{car } f(X)^r = 0$$

Il suffit alors de poser $Z = \sum_{i=0}^{r-1} g_i(X) f^i(X)$ et $Y = X - Z$; comme $g_0 = 0$

Z est divisible par $f(X)$ et donc $Z^r = 0$. $f(Y) = 0$ d'après (2) et comme f est sans facteur multiple Y est semi-simple.

On a donc démontré l'existence d'une telle décomposition. Soit $X = Y' + Z'$ une autre décomposition avec $[Y', Z'] = 0$. Alors $[X, Y'] = [X, Z'] = 0$ donc Y' et Z' commutent avec Y et Z . On a alors

$$Y + Z = Y' + Z' \quad \text{donc} \quad Y - Y' = Z' - Z$$

Mais la condition 3) de la prop. 2 montre que Y et Y' semi-simples commutant, $Y - Y'$ est semi-simple. D'autre part Z et Z' commutent et sont nilpotents, et l'on voit sans mal que $Z - Z'$ est nilpotent. Or on voit facilement qu'il n'y a pas d'endomorphisme non nul qui soit semi-simple et nilpotent. Donc $Y = Y'$ $Z = Z'$. Soit

e tel que $Xe = 0$ $Z = P(X)$ donc $\lambda e = P(0)e = \lambda e$ comme $Z^h = 0$ $\lambda = 0$
 et $Ze = 0$ $Ye = Xe - Ze = 0$

2.- Théorie des répliques.

La représentation linéaire $X \rightarrow X$ de $\mathcal{C}_1(\mathcal{M})$ dans \mathcal{M} se prolonge comme il a été dit au 1) de l'exposé n° 4 en une représentation $X \rightarrow X_{r,s}$ de \mathcal{C}_1 dans $\mathcal{M}_{r,s}$.

Définition 1 : $X' \in \mathcal{C}_1(\mathcal{M})$ est appelé une réplique de X si tout vecteur de $\mathcal{M}_{r,s}$ annulé par $X'_{r,s}$ est annulé par $X_{r,s}$

Proposition 4. a). Si X' est une réplique de X et X'' une réplique de X' X'' est réplique de X .

b). Si X' est réplique de X , $X'_{r,s}$ est réplique de $X_{r,s}$

a) est tout à fait clair.

Pour démontrer b) il faut remarquer que $(\mathcal{M}_{r,s})_{r',s'}$ s'identifie à $\mathcal{M}_{rr'+ss',rs'+sr'}$ cette identification étant compatible avec les représentations de \mathcal{C}_1 données (cf exposé n° 4, 1) C.Q.F.D.

On a vu (exp. n° 4, 1) que $\mathcal{M}^* \otimes \mathcal{M}$ s'identifie à $\mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) = \mathcal{C}_1(\mathcal{M})$, la représentation de \mathcal{C}_1 dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ étant donnée par $\theta(X).f = X \circ f - f \circ X$. Autrement dit

$$X_{1,1} f = [X, f]$$

Soit X' une réplique de X ; alors si f commute à X $X_{1,1} f = 0$ donc $X'_{1,1} f = 0$ et finalement X' commute à f . X' est dans le bicommutant de X donc (prop.1) $X' = P(X)$, P étant un polynôme. Il y a plus : on peut choisir ce polynôme sans terme constant. En effet deux cas sont à distinguer.

1) X n'annule aucun vecteur de \mathcal{M} . Alors son polynôme minimal a un terme constant non nul qu'on peut supposer égal à 1. Par suite $1 = Q(x) \cdot Q$ sans terme constant. Mais alors dans $P(X)$ on peut remplacer le terme constant par un polynôme sans terme constant en X .

2) X annule un vecteur $e \neq 0$. Alors $X'e = 0$ i.e $P(X)e = 0$ or puisque $Xe = 0$ $P(X)e = P(0)e = 0$ donc $P(0) = 0$

De plus comme $X'_{r,s}$ est réplique de $X_{r,s}$ $X'_{r,s} = P_{r,s}(X_{r,s})$. La réciproque est évidente: si $X'_{r,s}$ est un polynôme sans terme constant en $X_{r,s}$ tout vecteur annulé par $X_{r,s}$ est annulé par $X'_{r,s}$. Donc :

Proposition 5. Pour que X' soit réplique de X , il faut et il suffit que pour tout couple (r,s) $X'_{r,s}$ s'exprime comme un polynôme sans terme constant en $X_{r,s}$

On va encore démontrer quelques propriétés des répliques, assez élémentaires mais essentielles par la suite.

Proposition 6. Si Y et Z sont respectivement les composantes semi-simple et nilpotent de X , $Y_{r,s}$, $Z_{r,s}$ sont respectivement les composantes semi-simples et nilpotentes de $X_{r,s}$.

En effet $Y_{r,s}$ est semi-simple (appliquer le 3) de la prop.2) $Z_{r,s}$ est nilpotent, et $[Y_{r,s}, Z_{r,s}] = [Y, Z]_{r,s} = 0$. Enfin $X_{r,s} = Y_{r,s} + Z_{r,s}$; l'unicité de la décomposition de $X_{r,s}$ permet de conclure :

Corollaire : Y et Z sont des répliques de X .

En effet $Y_{r,s}$ et $Z_{r,s}$ étant les composantes semi-simple et nilpotente respectivement de $X_{r,s}$ annulent tout vecteur annulé par $X_{r,s}$ (prop.3)

Enfin étudions l'effet d'une extension du corps de base.

Proposition 7 : Si X' est une réplique de X , X'^L est une réplique de X^L . Réciproquement toute réplique (dans \mathcal{M}^L) de X^L est combinaison linéaire à coefficients dans L de répliques de X .

D'après la proposition 5 $X'_{r,s} = P(X_{r,s})$ donc $X'^L = P((X_{r,s})^L) = P((X^L)_{r,s})$ donc X'^L est réplique de X^L . Réciproquement tout L -endomorphisme de \mathcal{M}^L est de la forme $Y = \sum \omega_i Y_i^L$ $Y_i \in \mathcal{M}^L$, $\omega_i \in L$ linéairement indépendants.

$$Y_{r,s} = \sum \omega_i (Y_i)_{r,s}^L$$

Si un vecteur de $\mathcal{M}_{r,s}$ est annulé par $Y_{r,s}$ il est donc annulé séparément par les $(Y_i)_{r,s}^L$ donc si Y est réplique de X^L , tout vecteur de $\mathcal{M}_{r,s}$ annulé par $X_{r,s}$ est annulé par les $(Y_i)_{r,s}$. C.Q.F.D.

3.- Le critère de nilpotence.

Théorème 1. Pour que X soit nilpotent, il faut et il suffit que $\text{Tr}(XX') = 0$ pour toute réplique X' de X .

Si X est nilpotent, comme X' commute à X XX' est nilpotent et $\text{Tr}(XX') = 0$.

Réciproquement soit $X = Y + Z$ la décomposition de X . Y est une réplique de X (prop.6) donc si Y' est une réplique de Y , elle est une réplique de X . Mais alors Y' commute à Z donc $Y'Z$ est nilpotent et $\text{Tr}(Y'Z) = 0$. Comme par ailleurs $\text{Tr}(Y'X) = 0$ on a $\text{Tr}(YY') = 0$ et on est ramené à prouver ceci :

Soit Y semi-simple tel que $\text{Tr}(YY') = 0$ pour toute réplique Y' de Y .

Alors $Y = 0$

En vertu de la proposition 7 on peut se limiter au cas où K est algébriquement clos. Soit une base $\{e_i\}$ de \mathcal{M} telle que $Y e_i = \lambda_i e_i$. Y' appartenant au bicommutant de Y , $Y' e_i = \mu_i e_i$. $Y_{r,s}$ est diagonale par rapport à la base $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e_{j_1}^* \dots \otimes e_{j_s}^* = f_{i,j}(\{e_i^*\})$ base de \mathcal{M}^* duale de $\{e_i\}$ et multiplié l'élément écrit par $\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_r} - \lambda_{j_1} \dots - \lambda_{j_s}$

Les éléments annulés par $Y_{r,s}$ sont donc combinaisons linéaires des $f_{i,j}$ tels que $\sum \lambda_{c_K} - \sum \lambda_{j_m} = 0$. Si toute relation linéaire à coefficients entiers entre les

λ_i a lieu entre les μ_i alors $Y'_{r,s}$ annulent tous ces éléments et Y' est réplique de Y .

Supposons alors $\text{Tr}(YY') = 0$ et $Y \neq 0$. Les λ_i engendrent sur le sous corps premier Q de K un espace vectoriel $P \neq (0)$. Q est le corps des rationnels puisque K est de caractéristique 0. Si $h \neq 0$ est une application Q -linéaire de P dans Q , et si $\mu_i = h(\lambda_i)$ toute relation entre les λ_i a lieu entre les μ_i et Y' est réplique de Y . Donc $0 = \text{Tr}(YY') = \sum \lambda_i h(\lambda_i)$. h étant Q -linéaire et $h(\lambda_i) \in Q$ on a $\sum_i h(\lambda_i) (h(\lambda_i)) = \sum_i h(\lambda_i)^2 = 0$, mais on est dans le corps des rationnels et une somme de carrés non nuls ne peut être nulle. Par suite $h(\lambda_i) = 0$ $h = 0$ contrairement à ce qu'on a supposé. C.Q.F.D.

4.- Algèbres de Lie algébriques.

Définition 2 : une sous-algèbre de Lie $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}^1(\mathcal{M})$ est dite algébrique si $X \in \mathcal{L}$ entraîne que toute réplique X' de X est dans \mathcal{L} .

Exemples : $\mathcal{L}^1(\mathcal{M})$ est algébrique.

l'intersection de toutes les algèbres de Lie algébriques contenant \mathcal{L} est une algèbre algébrique $\bar{\mathcal{L}}$ qu'on appelle l'enveloppe algébrique de \mathcal{L} .

Proposition 8. $\bar{\mathcal{L}}$ étant l'enveloppe algébrique de \mathcal{L}

- 1) tout idéal dans \mathcal{L} reste un idéal dans $\bar{\mathcal{L}}$
- 2) le centre de \mathcal{L} est contenu dans le centre de $\bar{\mathcal{L}}$
- 3) \mathcal{L} et $\bar{\mathcal{L}}$ ont même algèbre dérivée
- 4) si \mathcal{A} est un idéal de \mathcal{L} , $[\bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{A}}] \subset \mathcal{L}$

on se sert pour démontrer cette proposition du lemme :

Lemme : Soient P et Q deux sous-espaces de $\mathcal{L}^1(\mathcal{M})$ $Q \subset P$. L'ensemble des $X \in \mathcal{L}^1(\mathcal{M})$ tels que $\text{ad}X.P \subset Q$ est une algèbre algébrique.

En effet $\mathcal{O}_f^1(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}_{1,1}$ $\text{ad}X = X_{1,1}$. Alors si X' est une réplique de X $X'_{1,1} = \text{ad}X'$ est un polynôme sans terme constant en $\text{ad}X$. Donc si $\text{ad}X \cdot P \subset Q$ $\text{ad}X' \cdot P \subset Q$

la proposition 8 se démontre alors sans mal

$$1) \quad P = Q = \alpha \quad \alpha \text{ idéal de } \mathcal{O}_f \\ [\mathcal{O}_f, \alpha] \subset \alpha \Rightarrow [\bar{\mathcal{O}}_f, \alpha] \subset \alpha$$

$$2) \quad Q = 0 \quad P = \mathfrak{Z} \text{ (centre de } \mathcal{O}_f) \\ [\mathcal{O}_f, \mathfrak{Z}] \subset (0) \Rightarrow [\bar{\mathcal{O}}_f, \mathfrak{Z}] \subset (0)$$

$$3) \quad P = \mathcal{O}_f \quad Q = \mathcal{O}_f^{(2)} = [\mathcal{O}_f, \mathcal{O}_f] \\ [\mathcal{O}_f, \mathcal{O}_f] \subset \mathcal{O}_f^{(2)} \Rightarrow [\bar{\mathcal{O}}_f, \mathcal{O}_f] \subset \mathcal{O}_f^{(2)}$$

$$\text{Puis } P = \bar{\mathcal{O}}_f \quad Q = \mathcal{O}_f^{(2)} \\ [\mathcal{O}_f, \bar{\mathcal{O}}_f] \subset \mathcal{O}_f^{(2)} \Rightarrow [\bar{\mathcal{O}}_f, \bar{\mathcal{O}}_f] \subset \mathcal{O}_f^{(2)} = [\mathcal{O}_f, \mathcal{O}_f]$$

$$4) \quad P = \alpha \quad Q = \mathcal{O}_f \\ [\mathcal{O}_f, \alpha] \subset \mathcal{O}_f \Rightarrow [\bar{\mathcal{O}}_f, \alpha] \subset \mathcal{O}_f$$

$$\text{puis } P = \bar{\alpha} \quad Q = \mathcal{O}_f \\ [\alpha, \bar{\alpha}] \subset \mathcal{O}_f \Rightarrow [\bar{\alpha}, \bar{\alpha}] \subset \mathcal{O}_f$$

Corollaire : \mathcal{O}_f est un idéal de $\bar{\mathcal{O}}_f$ et $\bar{\mathcal{O}}_f/\mathcal{O}_f$ est abélien.

Proposition 9. Si A est une algèbre (non nécessairement associative) de dimension finie sur K , ses dérivations forment une algèbre de Lie algébrique.

Une multiplication dans A est élément μ de $\mathcal{U}(A \otimes A, A) \simeq A_{1,2}$. Cherchons $X_{1,2} \cdot \mu$

$$\nu = X_{1,2} \cdot \mu = X \circ \mu - \mu \circ (1 \otimes X + X \otimes 1)$$

autrement dit

$$\begin{aligned} \nu(a \otimes b) &= X\mu(a \otimes b) - \mu(a \otimes Xb + Xa \otimes b) \\ &= X(a \cdot b) - a \cdot Xb - Xa \cdot b \end{aligned}$$

Que X soit une dérivation équivaut donc à $\nu = X_{1,2} \mu = 0$.

Si X' est une réplique de X $X'_{1,2} \mu = 0$ donc X' est une dérivation de A .

C.Q.F.D.

Proposition 10. Soit $\mathcal{O}_f \subset \mathcal{O}_f^1(\mathcal{M})$. \mathcal{N} désigne l'ensemble des $N \in \mathcal{O}_f$ tels que $\text{Tr}(NX) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{O}_f$. \mathcal{N} est un idéal de \mathcal{O}_f . Tout élément de $[\mathcal{N}, \mathcal{O}_f]$ est nilpotent et il en est de même de tout élément de \mathcal{N} si \mathcal{O}_f est algébrique.

On vérifie facilement l'identité $\text{Tr}([X, Y]Z) = \text{Tr}(X[Y, Z])$ (utiliser $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$). Donc si $X \in \mathcal{O}_f$ $Y \in \mathcal{O}_f$ $Z \in \mathcal{N}$ $\text{Tr}([X, Y]Z) = 0$ et par suite $\text{Tr}(X[Y, Z]) = 0$ donc $[Y, Z] \in \mathcal{N}$. \mathcal{N} est un idéal de \mathcal{O}_f .

Si \mathfrak{g} est algébrique et $N \in \mathfrak{K}$ on a $\text{Tr}(NN') = 0$ pour toute réplique N' de N donc (théorème 1) N est nilpotent.

Dans le cas général soit $N \in \mathfrak{K}$ $X \in \mathfrak{g}$ $Y \in \overline{\mathfrak{g}}$. Alors $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ et $\text{Tr}([N, X]Y) = \text{Tr}(N[X, Y]) = 0$ donc $\sum [N_i, X_i]$ est nilpotent puisque ses répliques sont dans $\overline{\mathfrak{g}}$.

Théorème 2 : Si la forme bilinéaire $\text{Tr}(XY)$ est identiquement nulle sur \mathfrak{g} , \mathfrak{g} est résoluble.

En effet tout $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotent d'après la prop.10. Donc d'après Engel $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotent et \mathfrak{g} est résoluble.

5.- Algèbres semi-simples. Critère de Cartan.

Définition 3 : Une algèbre de Lie est dite semi-simple si elle ne possède pas d'idéal résoluble. Une algèbre de Lie est dite simple si elle est de dimension > 1 et qu'elle n'a pas d'idéal non trivial.

Il résulte de cette définition que toute algèbre simple est semi-simple.

Théorème 3 : (Cartan) : 1) si \mathfrak{g} est semi-simple et θ une représentation fidèle de \mathfrak{g} , $\text{Tr}(\theta(x)\theta(y))$ est une forme bilinéaire non dégénérée.

2) Si la forme de Killing $B(x, y) = \text{Tr}(\text{adx ady})$ est non dégénérée \mathfrak{g} est semi-simple.

Les $n \in \mathfrak{g}$ tels que $\text{Tr}(\theta(x)\theta(n)) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ forment un idéal \mathfrak{K} de \mathfrak{g} d'après la proposition 10. On a $\text{Tr}(\theta(n)\theta(n')) = 0$ ($n, n' \in \mathfrak{K}$) donc (théorème 2) $\theta(\mathfrak{K})$ est résoluble et \mathfrak{K} est résoluble puisque θ est fidèle. Donc puisque \mathfrak{g} est semi-simple $\mathfrak{K} = 0$ et $\text{Tr}(\theta(x)\theta(y))$ est non dégénérée.

Réciproquement supposons la forme de Killing non dégénérée et \mathfrak{g} non semi-simple. Soit $\alpha \subset \mathfrak{g}$ un idéal résoluble non nul, n la longueur de α alors $\mathfrak{b} = \alpha^{(n-1)}$ est un idéal abélien non nul de \mathfrak{g} . Si $x, y \in \mathfrak{g}$ $b \in \mathfrak{b}$ on a

$[b, y] \in \mathfrak{b}$ $[x, [b, y]] \in \mathfrak{b}$ donc $[b, [X, [b, y]]] = 0$ par suite $\text{adb} \circ \text{adx} \circ \text{adb} = 0$ d'où $(\text{ad}' \bullet \text{adb})^2 = 0$ et $\text{Tr}(\text{adx adb}) = 0$ ce qui est absurde.

On va procéder maintenant à l'étude des idéaux d'une algèbre semi-simple.

Proposition 11. Soient \mathfrak{g} semi-simple et α, \mathfrak{L} deux idéaux de \mathfrak{g} . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) $\alpha \cap \mathfrak{L} = (0)$
- 2) $[\alpha, \mathfrak{L}] = (0)$
- 3) α et \mathfrak{L} sont orthogonaux pour la

