JEAN-PAUL ALLOUCHE

Séries de Dirichlet et automates

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 1 (1984-1985), exp. nº 26, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1984-1985__1__A8_0>

SÉRIES DE DIRICHLET ET AUTOMATES

par Jean-Paul ALLOUCHE (*)

Le but de cet exposé était de résumer deux articles, l'un en collaboration avec H. COHEN [1], le second en collaboration avec M. MENDÈS FRANCE [2] (en préparation).

Donnons juste deux résultats à ce sujet.

(*) Le produit infini $(\frac{1}{2})^{a(0)}\ (\frac{3}{4})^{a(1)}\ (\frac{5}{6})^{a(2)} \ldots$, où l'on a posé

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{si la somme des chiffres binaires de } n \text{ est paire} \\ -1 & \text{si cette somme est impaire,} \end{cases}$$

converge vers $1/\sqrt{2}$.

Ce résultat précédemment démontré par des méthodes de variable réelle (voir [4], [6] et [5]) est prouvé dans [1] par l'intermédiaire de l'étude des séries de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(n)}{(n+1)^s} .$$

Indiquons seulement ici que ces deux séries se prolongent en des fonctions entières, vérifiant des "équations fonctionnelles infinies" liant la valeur au point s aux valeurs aux points $s+1$, $s+2$, $s+3$, ... , du même type que "l'équation fonctionnelle infinie" vérifiée par la fonction ζ .

(*) Si l'on s'intéresse plus généralement (voir [2]) aux séries $\sum_1^{+\infty} \frac{b_n}{n^s}$, où b_n est 2-automatique (voir [3]), on montre qu'une telle série se prolonge en une fonction méromorphe dans tout le plan complexe, avec des candidats pôles situés sur un nombre fini de demi-réseaux à gauche. De surcroît, une telle fonction est composante d'un certain vecteur de Dirichlet (qui dépend de la suite (b_n) et d'un automate qui reconnaît cette suite), et ce vecteur vérifie une "équation fonctionnelle infinie matricielle" du même type que celles évoquées ci-dessus. On espère pouvoir en déduire des indications sur le comportement asymptotique (en général oscillant vers l'infini) de la fonction sommatoire $\sum_{n\leq x} b_n$.

(*) Jean-Paul ALLOUCHE, UER de Mathématiques, Université de Bordeaux-I, 351 Cours de la Libération, 33405 TALENCE CEDEX.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLOUCHE (J.-P.) and COHEN (H.). - Dirichlet series and curious infinite products, Bull. London math. Soc (à paraître).

[2] ALLOUCHE (J.-P.) et MENDÈS FRANCE (M.). - (en préparation).

[3] CHRISTOL (G.), KAMAÉ (T.), MENDÈS FRANCE (M.) et RAUZY (G.). - Suites algébriques, automates et substitutions, Bull. Soc. math. France, t. 108, 1980, p. 401-419.

[4] ROBBINS (D.). - Solution to problem E 2692, Amer. math. Monthly, t. 86, 1979, p. 394-395.

[5] SHALLIT (J. O.). - On infinite products associated with sums of digits, J. of number Theory (à paraître).

[6] WOODS (D. R.). - Elementary problem proposal E 2692, Amer. math. Monthly, t. 85, 1978, p. 48