

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

JACQUES LAFONTAINE

Introduction à la géométrie hyperbolique

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome S9 (1991), p. 103-113

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991__S9__103_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**RENCONTRES DE THEORIE SPECTRALE ET GEOMETRIE
GRENOBLE 1991
(Aussois du 7 au 14 avril)**

Introduction à la Géométrie Hyperbolique

Jacques LAFONTAINE

Université de Montpellier *
Département de Mathématiques
34095 MONTPELLIER CEDEX 5
FRANCE

* Laboratoire associé au CNRS.

A. PRÉSENTATION DU PLAN HYPERBOLIQUE.

On considère un espace vectoriel réel orienté E de dimension 3 muni d'une forme quadratique \langle, \rangle de signature $(1, 2)$, et de la métrique Lorentzienne correspondante. La surface d'équation

$$\langle x, x \rangle = -1$$

est un hyperboloïde à deux nappes, sur lequel la métrique induite par \langle, \rangle est riemannienne. En effet, l'espace tangent en x est l'orthogonal de $\mathbb{R}x$ pour \langle, \rangle , donc la restriction de \langle, \rangle y est définie positive.

Définition. *Le plan hyperbolique H^2 est une composante connexe de l'hypersurface ci-dessus, muni de la métrique riemannienne induite par \langle, \rangle .*

Il sera évidemment commode de choisir une base de E telle que

$$\langle x, x \rangle = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2,$$

et de considérer H^2 comme la composante connexe pour laquelle $x_0 > 0$ (et alors $x_0 \geq 1$).

Le groupe des isométries de H^2 est le sous-groupe de $O(1, 2)$ qui préserve cette composante connexe. Sa composante neutre est aussi la composante neutre $SO_o(1, 2)$ de $O(1, 2)$. On voit immédiatement que $SO_o(1, 2)$ opère transitivement sur H^2 ainsi que sur le fibré unitaire UH^2 , et que UH^2 est difféomorphe à $SO_o(1, 2)$. Explicitement, ce difféomorphisme est donné ainsi :

A $(x, u) \in UH^2$, on associe la matrice (x, u, v) , où v est l'unique vecteur orthogonal à x et u tel que le repère (x, u, v) soit direct. La situation est complètement analogue à celle de la sphère S^2 , dont le fibré unitaire s'identifie à $SO(3)$.

Cette analogie avec la sphère se retrouve pour la détermination des géodésiques. Si P est un 2-plan (vectoriel) lorentzien, donc d'équation $\langle u, x \rangle = 0$, où $\langle u, u \rangle = 1$, la réflexion lorentzienne par rapport à P est donnée par

$$x \rightarrow x - \langle x, v \rangle v.$$

Elle induit une isométrie de H^2 , dont l'ensemble des points fixes, autrement dit la demi-hyperbole $H^2 \cap P$, est une géodésique, et il y a assez de tels plans pour obtenir ainsi toutes les géodésiques.

Si $(x, u) \in UH^2$, l'unique géodésique paramétrée par longueur d'arc tangente à u à l'instant 0 est

$$t \rightarrow \cosh tx + \sinh tu.$$

On en tire deux conséquences importantes :

a) par deux points x, y de H^2 , il passe une unique géodésique (déterminée par le plan $\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y$), et la distance riemannienne entre x et y est donnée par

$$\cosh \text{dist}(x, y) = -\langle x, y \rangle.$$

b) si on identifie UH^2 à $SO_0(1, 2)$, le flot géodésique $\phi_t(x, u, v)$ s'obtient par le produit (à droite) de la matrice (x, u, v) par la matrice

$$\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B. ÉTUDE SOMMAIRE DU FLOT GÉODÉSIQUE.

Rappelons que le fibré tangent (et donc le fibré unitaire) d'une variété riemannienne (M, g) hérite d'une métrique riemannienne naturelle pour laquelle la projection $p : TM \mapsto M$ est une submersion riemannienne. Chaque fibre $T_m M$ est munie de la métrique euclidienne g_m , et les espaces horizontaux sont déterminés par la connexion. La façon la plus élémentaire de le voir est de passer par les courbes de TM . Une telle courbe

$$t \rightarrow (c(t), v(t)), \text{ où } v(t) \in T_{c(t)}M$$

(on dit alors que v est un champ de vecteurs le long de la courbe c de M) est dite *horizontale* si v est parallèle le long de c . La norme du vecteur vitesse d'une telle courbe est égale à la norme de $c'(t)$.

Par exemple, on vérifie que pour le fibré unitaire US^2 de la sphère standard, identifié à $SO(3)$, la métrique ainsi obtenue est "la" métrique bi-invariante. Par ailleurs, le flot géodésique est donné par la multiplication à droite par la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est donc un flot isométrique. Cette propriété caractérise les variétés à courbure constante $+1$. Mais la forme particulièrement simple que prend le flot géodésique de H^2 devrait permettre de dégager des propriétés remarquables.

Notons d'abord que $SO_o(1, 2)$ opère isométriquement à gauche sur H^2 . Cette action s'étend naturellement au fibré unitaire, et devient alors la multiplication à gauche. La métrique de fibré unitaire de $SO_o(1, 2)$ est invariante à gauche, il suffit de la connaître en l'élément neutre.

Au point $(x, u) \in UH^2$, on introduit la courbe verticale

$$t \rightarrow (x, \cos tu + \sin tv)$$

et les courbes horizontales

$$t \rightarrow (\cosh tx + \sinh tu, \sinh tx + \cosh u) \quad \text{et} \quad t \rightarrow (\cosh tx + \sinh tv, u)$$

dont les vecteurs vitesse en 0 se projettent sur u et v . Cela permet de voir qu'une base orthonormée de $\mathfrak{so}(1, 2)$ pour cette métrique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Etudier le linéarisé du flot géodésique revient à étudier l'action de $\text{Ad}(\exp -tL)$ sur $\mathfrak{so}(1, 2)$, où L est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est évidemment laissée invariante : tautologiquement, le linéarisé du flot d'un champ de vecteurs laisse ce champ invariant ! Par contre, si on pose

$$X^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, X^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, H = 2L$$

on vérifie que

$$[H, X^+] = 2X^+, [H, X^-] = -2X^-, [X^+, X^-] = H.$$

On en déduit que

$$\text{Ad}(\exp -tL).X^+ = e^t X^+ \quad \text{et} \quad \text{Ad}(\exp -tL).X^- = e^{-t} X^-.$$

Sur le tangent au fibré unitaire, nous avons mis en évidence une décomposition d'un supplémentaire de la droite invariante par le flot en deux sous-espaces (ici de

dimension 1) l'un, $\mathbb{R}X^+$, exponentiellement stable, l'autre $\mathbb{R}X^-$ exponentiellement instable. Nous venons de montrer que le flot géodésique de H^2 est un flot Anosov. A la différence de ce qui se passe pour S^2 , cette propriété subsiste par petite perturbation de la métrique. Pour étudier la situation de plus près, il reste à interpréter les flots des champs donnés par X^+ et X^- , ce que nous ferons en D.

On remarque aussi que les relations entre H, X^+, X^- sont les relations auxquelles satisfait la base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, ce qui n'est pas fortuit. En fait, une retombée de l'étude des différents "modèles" du plan hyperbolique, que nous allons aborder maintenant, est l'isomorphisme

$$SO_0(1, 2) \simeq SI(2, \mathbb{R}) / \pm I.$$

Notons enfin que la forme de Liouville de UH^2 est à un facteur près la forme duale de H par rapport à la base H, X^+, X^- de l'algèbre de Lie.

C. MODÈLES DU PLAN HYPERBOLIQUE.

Nous allons représenter H^2 avec d'autres coordonnées, qui permettent l'usage de dessin que le point de vue lorentzien, malgré sans grande simplicité, ne promet pas vraiment. Il y a tout d'abord les *coordonnées normales*. Un point $x \in H^2$ et une base orthonormée u, v de $T_x H^2$ étant donnés, elles sont de la forme

$$(r, \theta) \rightarrow \cosh rx + \sinh r(\cos \theta u + \sin \theta v).$$

La métrique s'écrit alors

$$g = dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2.$$

On en déduit, ce que nous n'avons pas encore montré, que H^2 est à courbure constante -1 . Il est plus intéressant de chercher à représenter H^2 par une métrique sur un ouvert de \mathbb{R}^2 qui soit conforme à la métrique euclidienne et invariante par rotation autour de l'origine. En écrivant que

$$g = dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2 = f^2(\rho)(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2)$$

on voit que

$$g = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

sur le disque unité. C'est le *disque de Poincaré*. Il privilégie un point, l'origine du disque. Les géodésiques passant par ce point sont des segments de droites. Le groupe des isométries conservant l'orientation est formé des transformations

$$z \rightarrow \frac{az + b}{\overline{bz + \overline{a}}}$$

avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$, d'où l'isomorphisme

$$SO_o(1, 2) \simeq SU(1, 1) / \pm I.$$

(On vérifie directement que ces transformations conviennent, et donnent tout pour des raisons de dimension). On en déduit que les géodésiques ne passant pas par l'origine sont des arcs de cercles orthogonaux au cercle unité. Nous invitons le lecteur à vérifier que la perspective à partir du point $(0, 0, -1)$ donne une isométrie de H^2 sur le disque de Poincaré. Les points du cercle unité correspondent aux directions isotropes (c'est à dire annulant la forme quadratique).

Définition. Un point à l'infini de H^2 est une direction isotrope.

Dans le modèle du disque, les points à l'infini sont représentés par le bord du disque. Le résultat suivant très facile avec le modèle lorentzien, mais de démonstration devient très visuelle avec le disque de Poincaré, justifie cette terminologie.

Proposition. Si γ et γ' sont deux géodésiques distinctes de H^2 , trois cas sont possibles :

- a) elles s'intersectent en un point unique de H^2 ;
- b) elles ne s'intersectent pas, et $\text{dist}(\gamma, \gamma') > 0$;
- c) elles "s'intersectent" en un point à l'infini, et $\text{dist}(\gamma, \gamma') = 0$.

Preuve. Une géodésique est déterminée par ses "points à l'infini" c'est à dire les points du cercle unité qui la définissent. Soient (u, v) et (u', v') ces points. Si u' et v' sont séparés par u et v , on est dans le cas a). Sinon, on est dans le cas b), et leur distance est strictement positive, car elles admettent une perpendiculaire commune. Le cas c) correspond à la situation où les paires (u, v) et (u', v') ont un point communs, et où les géodésiques correspondantes sont "tangentes" à l'infini.

La dernière assertion se démontre encore plus facilement dans le *demi-plan de Poincaré*, obtenu à partir du disque unité par la transformation

$$z \rightarrow i \frac{1+z}{1-z}$$

et en transportant la métrique. On obtient la métrique

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

sur le demi-plan $y > 0$. Les géodésiques sont les demi-cercles centrés sur l'axe réel et les demi-droites $x = cte$. Le groupe des isométries directes est constitué des transformations du type

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1,$$

d'où l'isomorphisme

$$SO_o(1, 2) \simeq Sl(2, \mathbb{R}) / \pm I$$

annoncé plus haut. Ce modèle privilégie un point à l'infini. Pour deux géodésiques admettant ce même point à l'infini, donc de la forme $x = c$ et $x = c'$, l'assertion c) ci-dessus est immédiate, puisque

$$\text{dist}((c, y), (c', y)) \leq \frac{|c - c'|}{y}.$$

On peut toujours se ramener à ce cas à l'aide d'une isométrie convenable.

On déduit facilement de ce modèle les *coordonnées de Fermi*, où la métrique s'écrit

$$g = \cosh^2 u ds^2 + du^2.$$

Ici, s désigne l'abscisse curviligne sur une géodésique donnée, et u la distance (algébrique) à cette géodésique. Ce modèle montre que la symétrie orthogonale par rapport à une géodésique est une isométrie, ce qui est utile pour faire des recollements (cf. infra).

D. HOROCYCLES.

Dans une variété riemannienne, les hypersurfaces $\text{dist}(a, m) = cte$ (définies génériquement) sont orthogonales aux géodésiques issues du point a . C'est le fameux "lemme de Gauss." Il revient au même de dire que la distribution d'hyperplans orthogonaux aux géodésiques issues d'un point donné est *intégrable*. Dans le cas de H^2 , il est naturel d'examiner le cas des géodésiques ayant même point à l'infini. C'est typiquement un problème auquel le modèle du demi-plan de Poincaré est bien adapté : les trajectoires orthogonales aux droites $x = cte$ (n'oublions pas que les angles sont les mêmes que dans le cas euclidien) sont les droites $y = cte$.

Définition. On appelle *horocycles* les trajectoires orthogonales aux géodésiques de H^2 ayant même point à l'infini.

Dans le modèle du demi-plan de Poincaré, les horocycles sont les droites parallèles à l'axe réel ou les cercles tangents à cet axe. Dans le modèle du disque, ce sont les cercles tangents au cercle unité. Dans le modèle Lorentzien, ce sont les

intersections avec l'hyperboloïde des plan $\langle x, b \rangle = cte$, où b est un vecteur isotrope. Notons la propriété suivante.

Proposition. Soient h, h' deux horocycles ayant même point à l'infini. Alors la fonction $x \mapsto dist(x, h')$ est constante sur h .

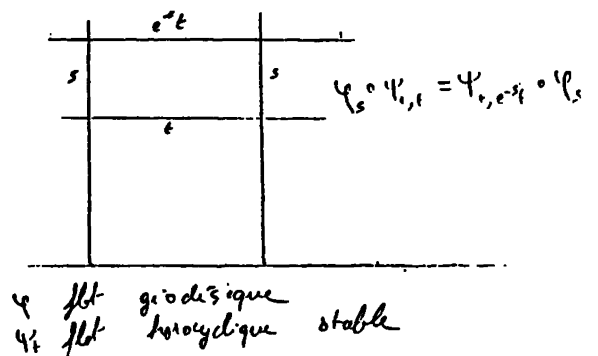
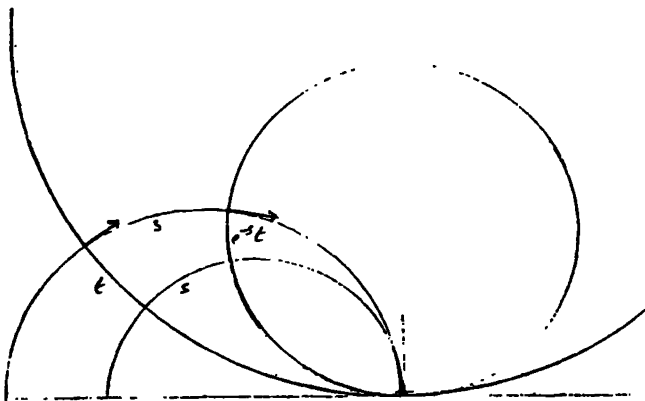
Preuve. On se ramène au cas où h et h' sont de la forme $y = cte$ dans le modèle demi-plan.

Notons aussi qu'un horocycle étant fixé, on peut lui associer des coordonnées qui rappellent les coordonnées de Fermi, où

$$g = e^{-2s} dt^2 + ds^2$$

Ici, t est l'abscisse curviligne de l'horocycle défini par $s = 0$, et s est la distance à cette horocycle. Ce modèle met en évidence la "pointe" obtenue en quotientant H^2 par un groupe engendré par une isométrie parabolique mise sous la forme $(s, t) \mapsto (s, t + t_0)$ (voir le paragraphe suivant).

A point $(x, u) \in UH^2$, on associe naturellement deux horocycles, dits stable et instable, passant par x et l'un point $\gamma(\infty)$ ou $\gamma(-\infty)$ de la géodésique orientée définie par (x, u) . Dans le modèle lorentzien, ces horocycles sont définis par les plans $\langle y, x \pm u \rangle = -1$. Pour les modèles de Poincaré, voir le dessin ci-dessous.



On définit alors les flots horocycliques ψ_{\pm} de la façon suivante. Si v est le vecteur orthogonal à u dans $T_x H^2$ tel que la base u, v soit directe, on oriente par v les horocycles définies par (x, u) , et $\psi_{+,t}(x, u)$ (resp. $\psi_{-,t}(x, u)$) est donné par le vecteur unitaire normal (avec la condition d'orientation évidente) à l'horocycle stable (resp. instable) au point situé à la distance algébrique t de x situé sur cet horocycle. En identifiant comme dans A. UH^2 au groupe $Isom_o(H^2)$ (peu importe le modèle), il est immédiat que $\psi_{\pm,t}$ est un groupe à un paramètre de difféomorphismes qui commute avec les translations à gauche du groupe (puisque celles-ci proviennent des isométries de la base). On a donc $\psi_{\pm,t}g = g \exp tY_{\pm}$. Pour déterminer Y_{\pm} , on travaille par exemple dans le modèle demi-plan en partant du

point (i, i) de UH^2 , et on vérifie que

$$Y_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En désignant par ϕ_s le flot géodésique, on voit aussi (toujours avec le modèle demi-plan, les géodésiques $x = cte$ et les horocycles $y = cte$) que

$$\phi_s \circ \psi_{+,t} = \psi_{+,e^t} \circ \phi_s \quad \text{et} \quad \phi_s \circ \psi_{-,t} = \psi_{-,e^{-t}} \circ \phi_s.$$

Ces propriétés précisent le caractère Anosov du flot géodésique. Elles sont évidemment encore valable pour les variétés obtenues en quotientant H^2 par un groupe d'isométries, et sont le point de départ de la preuve de l'ergodicité du flot géodésique sur les quotients compacts de H^2 .

E. ISOMÉTRIES

Revenons au modèle lorentzien. Tout $A \in SO_o(1, 2)$ admet 1 comme valeur propre (même argument que pour $SO(3)$.) Soit x un vecteur propre correspondant. Si $\langle x, x \rangle \neq 0$ alors 1 est valeur propre simple.

a) si $\langle x, x \rangle < 0$, A a un unique point fixe de dans H^2 . On dit que A est *elliptique*. Dans le modèle du disque, on peut se ramener par conjugaison au cas où ce point est l'origine, et A est alors une rotation. Cela montre que les classes de conjugaison d'éléments elliptiques sont paramétrées par $SO(2)$.

b) si $\langle x, x \rangle > 0$, $\mathbb{R}x^\perp$ est un plan lorentzien stable par A . Donc il existe dans H^2 une (unique) géodésique globalement invariante par A . On dit que A est *hyperbolique*. Dans le modèle du demi-plan, on peut se ramener au cas où cette géodésique est la droite $x = 0$, et A est alors de la forme $z \mapsto \lambda z$, avec $\lambda > 0$. La géodésique invariante est translatée par $\log \lambda$. Les classes de conjugaison d'éléments hyperboliques sont paramétrées par \mathbb{R}^+ .

c) si $\langle x, x \rangle = 0$, A laisse globalement invariant l'ensemble des géodésiques admettant x pour point à l'infini. On dit que A est *parabolique*. Dans le modèle du demi-plan, on se ramène au cas où ce sont les géodésiques $x = cte$, et A est de la forme $z \mapsto z + h$, où $h \in \mathbb{R}$. Chaque horocycle passant par le point à l'infini invariant est globalement invariant.

Une isométrie $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ du demi-plan de Poincaré est elliptique si $|a+d| < 2$, hyperbolique si $|a+d| > 2$ et parabolique si $|a+d| = 2$.

F. FORMULAIRE.

(Les démonstrations, si on les prend bien, sont des exercices faciles et agréables).

a) Trigonométrie hyperbolique.

Pour un triangle géodésique T de H^2 dont les côtés ont pour longueur a, b, c , en notant A, B, C les angles opposés à ces côtés, on a

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos A$$

(facile dans le modèle lorentzien, pénible sinon)

$$\frac{\sinh a}{\sin A} = \frac{\sinh b}{\sin B} = \frac{\sinh c}{\sin C}.$$

b) Baby Gauss-Bonnet.

$$\text{aire}(T) = \pi - A - B - C.$$

(se ramener au cas où un angle est nul, et travailler alors dans le modèle demi-plan.)
On en déduit, pour tout $g \geq 2$, l'existence de polygones réguliers à $4g$ cotés dont la somme des angles est égale à 2π . C'est la façon la plus économique d'obtenir des surfaces de genre g à partir de pavages du plan hyperbolique.

c) birapport et distance de deux points.

Le birapport de 4 nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 dont trois au moins sont distincts

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}.$$

(La valeur "infinie" est acceptée, ainsi que le cas où un z_i est infini. Par exemple

$$(z_1, z_2, z_3, \infty) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}.$$

Il est laissé invariant par transformation homographique; c'est un nombre réel si et seulement si les z_i sont alignés ou cocycliques.

Si p et q sont deux points distincts de H^2 , et u, v les points à l'infini de la géodésique qu'ils déterminent, dans chacun des modèles de Poincaré,

$$d(p, q) = |\log |(p, q, u, v)||.$$

d) birapport, angles et distances entre géodésiques.

Soient γ et γ' deux géodésiques distinctes de H^2 , dont les points à l'infini (dans l'un des modèles de Poincaré) sont (u, v) et (u', v') , et soit r le birapport (u, v, u', v') . Alors r est réel, et γ et γ' s'intersectent ou sont à distance strictement positive suivant que r est strictement négatif ou positif. On a de plus

$$\left| \frac{1+r}{1-r} \right| = \begin{cases} \cos \angle(\gamma, \gamma') & \text{si } r < 0 \\ \cosh d(\gamma, \gamma') & \text{si } r > 0. \end{cases}$$

Cette formule est très utile pour construire des pentagones puis des hexagones à angles droits. A partir de ceux-ci, on construit par recollement des "pantalons" à bord géodésiques, puis en recollant ces pantalons des surfaces de genre $g > 1$ munies d'une métrique à courbure -1 .

BIBLIOGRAPHIE

A. CHENCINER, Livre à paraître.

A. FATHI, F. LAUDENBACH, V. POENARU, Travaux de Thurston sur les Surfaces, Astérisque 66-67(1979).

S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE, Riemannian Geometry, Springer Universitext.

W. MAGNUS, Non-Euclidean tessellations and their groups, Academic Press.

P. PANSU, Variétés à courbure négative, Séminaire Bourbaki, Mars 91.